MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

CURSO 2014-15

UNA NOTA SOBRE LA PROPORCIONALIDAD EN SECUNDARIA: RELACIÓN CON OTRAS DISCIPLINAS

ESPECIALIDAD: MATEMÁTICAS

APELLIDOS Y NOMBRE: GONZÁLEZ LÓPEZ ROBERTO

DNI: 52478060H

CONVOCATORIA: JUNIO

TUTOR/A: Juan José Prieto Martínez

Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Facultad de Matemáticas. UCM

"Para Pitágoras la primera esencia era la naturaleza de los números y proporciones que se extienden a través de todas las cosas, de acuerdo con los cuales todo está armónicamente dispuesto y convenientemente ordenado". Jámblico, Vida Pitagórica. XII.59, p.49

ÍNDICE DE CONTENIDOS

RESUMEN

Desde la antigüedad hasta nuestros días, la proporcionalidad ha estado siempre presente en incontables aspectos y situaciones de la vida cotidiana así como en las artes y en las ciencias. El concepto de proporcionalidad no solo aparece en el ámbito de la Matemática, sino también en muchas otras cuestiones, contenidos y problemas que se presentan a los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de la Comunidad de Madrid en el transcurso de su aprendizaje por las diversas disciplinas. La proporcionalidad destaca por ser un eje importante en la educación en general y por su especial relación con el desarrollo de la inteligencia, la intuición, la comprensión y el razonamiento de los estudiantes. Así mismo, la necesidad del docente de relacionar constantemente las Matemáticas con el resto de disciplinas, hace indispensable rediseñar el método de evaluación tanto de las competencias como de los objetivos que deberán alcanzar los estudiantes mediante el aprendizaje de la proporcionalidad. Por ello, este Trabajo pretende responder a las preguntas de: ¿cómo se puede enseñar la proporcionalidad en la ESO de manera que ésta pueda relacionarse de forma transversal con otras disciplinas como la economía, las ciencias, la naturaleza, la música, la pintura, la escultura, la arquitectura y los objetos y diseños de la vida cotidiana? y ¿cuáles son y cómo se pueden evaluar las competencias mediante el aprendizaje de la proporcionalidad tomando como modelo las pruebas PISA y CDI?

PALABRAS CLAVE

Educación secundaria obligatoria, educación matemática, proporcionalidad, relaciones transversales con otras disciplinas como la economía, las ciencias, la naturaleza, la música, la pintura, la escultura, la arquitectura y los objetos y diseños de la vida cotidiana, evaluación de competencias, pruebas PISA y CDI.

ABSTRACT

From ancient times to the present day, Proportionality has always been present in countless aspects of daily life´s situations as well as in arts and sciences. The Proportionality concept appears not only in the field of Mathematics, but also in many other issues, contents and problems that are presented to the students of Comunidad de Madrid´s Compulsory Secondary Education (ESO) at the course of learning the various disciplines. Proportionality stands out as an important education in general and its special relationship with the students´ development of intelligence hub, intuition, understanding and reasoning. Also, teachers' need to constantly relate Mathematics with other disciplines, makes it essential to redesign the evaluation method of both competencies and objectives to be achieved by students through the learning of Proportionality. Therefore, this paper aims to answer the questions: How to teach Proportionality at ESO so that it can be related transversely with other disciplines such as economics, science, nature, music, painting, sculpture, architecture and everyday life's objects and designs? and What are they and how to assess the competencies through the learning of Proportionality based on PISA and CDI tests?

KEY WORDS

Compulsory secondary education, mathematics education, proportionality, transversal relations with other disciplines such as economics, science, nature, music, painting, sculpture, architecture and everyday life's objects and designs, competencies evaluation, PISA and CDI tests.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN

Con las Matemáticas se desarrollan facultades tan importantes como el razonamiento y la abstracción. Pero quizá sea con la proporcionalidad donde más claramente se muestre por primera vez a los estudiantes, y de una manera más clara para ellos, la vinculación directa de las Matemáticas que aprenden con innumerables aspectos, situaciones y fenómenos del mundo real, así como con las propiedades de los objetos que les rodean y con el resto de disciplinas que estudian paralelamente a las propias Matemáticas.

Sin lugar a dudas, el profesor de Matemáticas, mejor que nadie, sabe que la proporcionalidad siempre está presente en mayor o menor medida en muchas de las situaciones y problemas que se presentan a los estudiantes en el transcurso de su aprendizaje por las diversas ramas del conocimiento.

Con la proporcionalidad, el estudiante aprende a desarrollar su intuición para comprender y razonar sobre qué tipo de relaciones pueden darse entre diferentes magnitudes y parámetros. También aprende a percibir que no siempre existen relaciones de dependencia lineal directa o inversa entre éstos. De este modo, cuando el estudiante identifica claramente una situación de proporcionalidad, de alguna manera intuye que la solución del problema se vuelve más sencilla. Por tanto, es de vital importancia que éste ejercite su intuición para saber cuándo existe o no existe proporcionalidad entre dos magnitudes o parámetros. Así mismo, el estudiante aprende a asociar los números, como entes abstractos, a cantidades o magnitudes reales y bien definidas. Es ahora cuando de verdad debe conocer y manejar estas cantidades presentes en la vida cotidiana o en el mundo que le rodea, que como se ha mencionado anteriormente, algunas de ellas pueden relacionarse de manera especial (mediante la proporcionalidad).

No por ello menos importante, debe mencionarse que la proporcionalidad se presenta también como un tema tan recurrente como trascendente, no solo en las distintas ramas de la Matemática, sino también de manera transversal con el resto de disciplinas que paralelamente aprende el estudiante y están relacionadas con las ciencias, las artes, la música, la tecnología, etc.

Es por ello que la proporcionalidad debería enseñarse con la importancia y sentido que se merece, es decir, como un tema trascendental y recurrente de manera integrada no solo como parte fundamental de las Matemáticas sino como parte imprescindible en el resto de disciplinas de la en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO en adelante).

La enseñanza de la proporcionalidad brinda al docente una oportunidad única para poder relacionar entre sí muchos campos dentro de la propia Matemática como son la aritmética, álgebra, funciones y gráficas, geometría o estadística. Aunque se observa claramente que la proporcionalidad surge indiscutiblemente como contenido del bloque de aritmética, inmediatamente muestra su presencia, relación y vinculación en mayor o menor medida, no solo con otros aspectos de la propia Matemática, sino con otros ámbitos de los entornos disciplinares antes mencionados como son la economía, naturaleza, ciencias, música, pintura, escultura, arquitectura, objetos y diseños de la vida cotidiana, etc.

Teniendo en cuenta además mi experiencia como profesor en prácticas de estos últimos meses vivida en el Prácticum impartiendo clases de Matemáticas a los distintos cursos de la ESO dentro de un Instituto de Educación Secundaria (IES), he detectado que de forma habitual en todos los niveles del aprendizaje, tanto de la ESO como del Bachillerato, existen muchas lagunas o deficiencias tanto de conocimiento como de entendimiento por parte de los estudiantes, sobre la mayoría de los conceptos y aspectos relacionados con la proporcionalidad, los cuales resumo y menciono a continuación:

Especialmente los estudiantes tienden a aprenderse de memoria las técnicas de resolución de problemas en los que interviene la proporcionalidad sin entender el fundamento de aquello que están haciendo. Por ejemplo se aprenden de memoria la técnica de la regla de tres o de los repartos proporcionales.

Otro aspecto importante es la falta de entendimiento de los conceptos de magnitud, unidad de medida y razón de proporcionalidad. Muchos estudiantes piensan que la proporcionalidad consiste en averiguar números, y continúan persistiendo en la idea equivocada de seguir operando con números meramente abstractos, digamos que sin significado real. Se olvidan de que esos números ahora representan “cantidades de la vida real” de una cierta magnitud, bien definidas y se olvidan u omiten acompañarlos de sus respectivas unidades de medida a la que representan dichos números. Todo lo anterior conlleva también un distanciamiento absoluto del concepto de la razón de proporcionalidad.

Esto además se complica con la falta de intuición y déficit de razonamiento. Aquí el problema radica en que el estudiante muchas veces intenta resolver las tareas o los problemas relacionados con la proporcionalidad aplicando la “mecanicidad” o “automaticidad” de los pasos de las técnicas que previamente se ha aprendido de memoria sin tener una visión global o entendimiento del proceso en el que se implica la proporcionalidad.

Así mismo he presenciado con frecuencia lo que *Ives Chevallard et al. (2000)* en su libro *Estudiar Matemáticas* identifica como el fenómeno de la *irresponsabilidad matemática* del estudiante: lo que viene a ser la falta de interés o “dejadez” por comprobar si son o no correctas sus respuestas. El estudiante no sabe o no quiere esforzarse en comprobar la veracidad de las respuestas que da a los problemas o ejercicios que se le plantean.

De todo lo anterior, podemos señalar que el aprendizaje y la enseñanza de la proporcionalidad, así como de todos o de la mayor parte de los conocimientos transversales que la vinculan con otros campos de la Matemática y de otras disciplinas, es un proceso tedioso y complejo, el cual se debe abordar y tratar con la dedicación e importancia que se merece a lo largo de varios años de formación sobre todo en la Enseñanza Secundaria tal y como veremos más adelante.

Parece evidente por tanto, que la proporcionalidad es un tema de conocimiento cuya trascendencia y recurrencia se da, a lo largo de la enseñanza de las Matemáticas, y continúa presente en todos los cursos de la ESO. Y que además es una invitación casi obligada hacia el docente a investigar sobre cómo integrar, relacionar y/o fusionar las propias Matemáticas con otros ámbitos o conocimientos multidisciplinares mediante la enseñanza de la misma. De este modo se plantea la siguiente pregunta a la que se intentará dar respuesta:

¿Cómo se podría enseñar la proporcionalidad en la ESO de manera que ésta se relacione de forma transversal con otros aspectos relevantes tanto de las propias Matemáticas como con otros temas interdisciplinares como la economía, las ciencias y la naturaleza, la música, la pintura, la escultura, la arquitectura y los objetos y diseños de la vida cotidiana?

Pero para ello necesitaremos conocer antes ¿qué contenidos enseñar sobre la proporcionalidad y cuándo enseñarlos?

Así mismo la necesidad del docente de relacionar constantemente las Matemáticas con el resto de disciplinas, mediante la enseñanza de la proporcionalidad, hace indispensable reformularse el método o el proceso de evaluación que diseñará para valorar las competencias básicas y los objetivos que deberán alcanzar los estudiantes con este aprendizaje.

La cuestión que antes se ha planteado propone realizar un sistema de enseñanza basado en un conjunto conocimientos relacionados entre sí a la vez que abiertos, conectados y fundamentados unos con otros en los diversos campos multidisciplinares y en constante relación por medio de la proporcionalidad. Y también pretende que el estudiante logre un conjunto de competencias entendidas como habilidades, sentimientos, creencias, intuición, valores y actitudes, en relación a las Matemáticas y otras disciplinas, que puedan culminar en un desempeño satisfactorio de su condición de estudiante de la ESO. Por lo tanto, se hace indispensable cuestionarse también el método de evaluación que el docente llevará a cabo tanto en el transcurso como al finalizar la enseñanza de la proporcionalidad. De este modo se plantea también la siguiente pregunta a la que se intentará dar respuesta:

¿Cuáles son esas competencias y de qué manera se pueden evaluar mediante el aprendizaje de la proporcionalidad en la ESO?

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. LA PROPORCIONALIDAD: RECURRENCIA Y RELEVANCIA

Se define como proporcionalidad según la Real Academia Española de la Lengua (RAE): *(Del lat. proportionalĭtas, -ātis). 1. f. Conformidad o proporción de unas partes con el todo o de cosas relacionadas entre sí.*

Según ANTONIO M. OLLER MARCÉN et al. (2013) en el artículo *LA GÉNESIS HISTÓRICA DE LOS CONCEPTOS DE RAZÓN Y PROPORCIÓN Y SU POSTERIOR ARITMETIZACIÓN,* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2013) 16 (3): 317-338: *La importancia de la proporcionalidad aritmética, tanto desde el punto de vista de la matemática escolar, como desde el punto de vista de su aplicación práctica, es innegable. Esta importancia queda reflejada en el número de trabajos en el campo de la Matemática Educativa que tienen este tópico como centro de atención. […] El razonamiento proporcional es una importante herramienta matemática. Múltiples fenómenos físicos y económicos pueden modelizarse utilizando los conceptos de razón y proporción. Muchos son también los problemas cotidianos que pueden resolverse con técnicas relacionadas con la proporcionalidad. […] El razonamiento proporcional es un recurso que se ha utilizado para resolver problemas que podríamos llamar cotidianos desde tiempo inmemorial.*

Según *LINA Mª JARAMILLO VÉLEZ (2012)* en la Tesis titulada LA PROPORCIONALDAD Y EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO presentada en la UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA: *Desde la antigüedad el concepto de proporcionalidad ha estado presente en innumerables aspectos de la vida cotidiana y se encuentra en muchas áreas del arte como la arquitectura, la escultura, la pintura y la música entre otras. […] El desarrollo del sentido de la proporcionalidad posibilita numerosas relaciones entre distintas ideas y conceptos matemáticos estudiados en la escuela en todos los niveles y/o grados. […] Uno de los propósitos fundamentales de la escuela actual es desarrollar el significado de la proporcionalidad en los estudiantes. […] El concepto de proporcionalidad sobresale por varias razones entre ellas por ser un eje importante en la educación […] y por su especial relación con el desarrollo de la inteligencia de los individuos que lo aprenden de forma significativa; y por consiguiente cabe destacar la relevancia de la continuidad de la enseñanza de este tema en el paso por la escuela. […] Las dificultades en el uso del concepto de proporcionalidad, como una relación entre magnitudes medibles en la resolución de problemas y las dudas en su uso en situaciones cotidianas se manifiestan continuamente; y a pesar de que su uso es frecuente sus ideas están dirigidas de manera mecánica al uso de la regla de tres, y ésta* *en muchas ocasiones es mal interpretada. […] Además dado que la relación de proporcionalidad entre magnitudes y los conceptos de razón y fracción hacen parte del contenido del currículo de la educación básica […], es importante indagar los conocimientos previos con los que los estudiantes llegan especialmente por su importancia en el aprendizaje de conceptos básicos de otras áreas de las Matemáticas como la trigonometría y el cálculo y en otras disciplinas que se esperan queden aprendidas […] para que su ingreso a la educación universitaria no tenga mayores tropiezos. Reiterándose así la importancia de desarrollar el significado de la proporcionalidad en la educación básica donde se agrupan varios temas que deben ser estudiados en la escuela.*

2.2. <u>LA IMPORTANCIA DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESO</u>

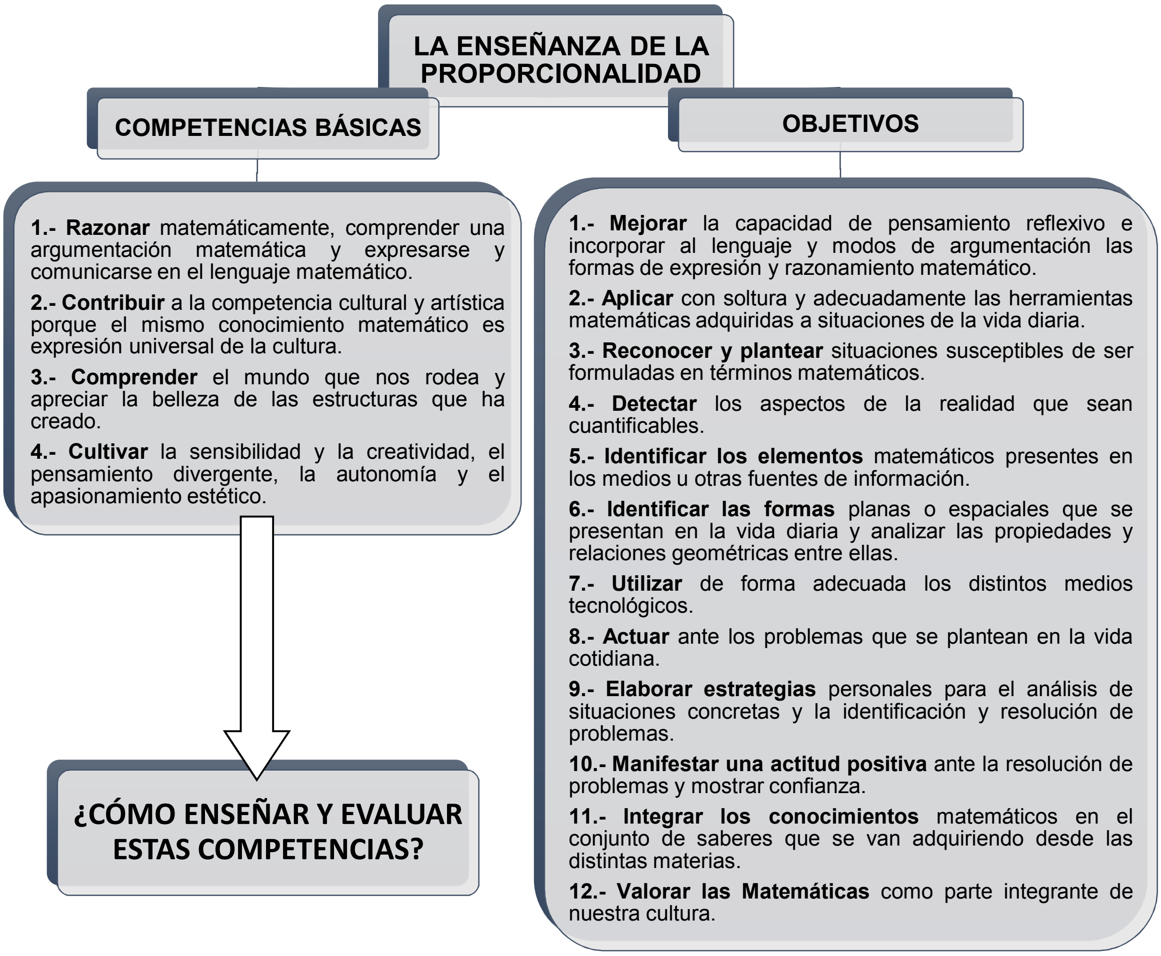
Teniendo en cuenta la normativa legal vigente sobre la ESO, veamos cómo se refleja la verdadera trascendencia que supone la enseñanza de la proporcionalidad en la Educación Secundaria. Se procede a identificar todos los conceptos y aspectos que estén estrechamente relacionados directa o indirectamente con la proporcionalidad en la enseñanza de las Matemáticas.

La presencia de la proporcionalidad en la visión global de la enseñanza de las Matemáticas en la ESO

Según el Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria sobre las *MATEMÁTICAS* en su *Introducción* cabe señalar lo siguiente en donde la proporcionalidad se encuentra presente de manera implícita en los siguientes aspectos:

La contribución de la proporcionalidad a la adquisición de las Competencias básicas y su implicación en los Objetivos generales de las Matemáticas

Continuando con lo establecido por el Decreto 23/2007, sobre la *Contribución de la materia de Matemáticas a la adquisición de las competencias básicas y sobre los Objetivos generales de las Matemáticas,* la enseñanza de la proporcionalidad está presente de forma bien directa o bien implícita en los siguientes aspectos:



Lo que nos lleva a plantearnos la pregunta: ¿De qué manera se pueden enseñar y evaluar estas competencias mediante el aprendizaje de la proporcionalidad en la ESO? Lo cual intentaremos analizar en el Apartado 2.5.

Las relaciones transversales de la enseñanza de la proporcionalidad en la ESO con otros conocimientos multidisciplinares

Habiendo analizando las competencias y objetivos a alcanzar mediante la enseñanza de la proporcionalidad, veamos ahora de qué modo ésta se encuentra presente de manera directa o indirecta dentro de los contenidos tanto de las propias Matemáticas como de otras disciplinas impartidas en la ESO. De este modo podremos analizar hasta qué punto la proporcionalidad es trascendente y relevante.

En primer lugar, tal y como se verá más adelante, se analizarán los Contenidos de Matemáticas del currículum de secundaria, donde se procurará identificar cuándo aparece bien de forma explícita o bien implícita el tema de la proporcionalidad. Se centrará la atención en los contenidos presentes en el Tercer Curso de la ESO, ya que es en esta etapa cuando la especialización hacia el bachillerato científico tecnológico o ciencias sociales es inminente. Se observa además que el currículum de Matemáticas establece que 3º de la ESO sea el curso que más dedicación tenga para el estudio y el trabajo de la proporcionalidad en todos los aspectos y de una manera más amplia y práctica.

También se procurará identificar a grandes rasgos cuándo y en qué contenidos de otras asignaturas de la ESO aparece bien de forma explícita o bien de forma implícita el tema de la proporcionalidad como: CIENCIAS SOCIALES, GEOGRAFÍA E HISTORIA, MÚSICA, BIOLOGÍA Y GEOLOGÍA, FÍSICA Y QUÍMICA y EDUCACIÓN PLÁSTICA Y VISUAL.

De este modo podemos hacernos una idea general de la respuesta que conteste a la pregunta antes planteada: ¿Qué contenidos enseñar sobre la proporcionalidad y cuándo enseñarlos?

Para ello, se presentan en forma de tablas una síntesis de la presencia de la proporcionalidad en los *Contenidos* de Matemáticas así como de otros campos multidisciplinares del currículum de secundaria (Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria) tal y como se describe en el ANEXO I del TFM.

2.3. EL PROPÓSITO DE LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD Y SUS PRINCIPALES DIFICULTADES

¿Cuál es el propósito de los docentes a la hora de enseñar la proporcionalidad?

En la memoria realizada por *María Elena RUIZ (2006)* titulado *LA PROPORCIONALIDAD COMO OBJETO DE ENSEÑANZA DEL DOCENTE*, se mencionan los siguientes datos relativos a los *PROPÓSITOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD de la UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE – ARGENTINA*: *Lo que se busca es caracterizar y comprender lo que dicen los docentes de matemática del nivel primario sobre la enseñanza de este concepto. […] De acuerdo a las entrevistas realizadas y a las planificaciones analizadas, los propósitos para la enseñanza de la proporcionalidad, pueden clasificarse en: que los estudiantes puedan resolver "problemas de la vida diaria",* para *"relacionar la matemática con la realidad",* para *"aplicarla en la economía de la casa* *o de otros oficios",* que *los estudiantes sepan "reconocer si una situación es o no de proporcionalidad", que sepan diferenciar si "una situación es de proporcionalidad directa o inversa", que el estudiante pueda reconocer si "una situación se puede resolver con Regla de tres", que los estudiantes "reconozcan las propiedades de la proporcionalidad", que "reconozcan que el porcentaje es un caso especial de la proporcionalidad",* para *la "lectura e interpretación" de tablas o de gráficos cartesianos, "para anticipar resultados, por ejemplo si viajan poder prever el tiempo de viaje de acuerdo a la velocidad que lleven",* para calcular *"el gasto en combustible de acuerdo a los kilómetros que realicen".*

Estas entrevistas se efectuaron a profesores de Matemáticas de la enseñanza Primaria, pero podríamos extrapolar sus respuestas a los profesores de Secundaria e incluso de Bachillerato, ya que, como hemos visto anteriormente, la proporcionalidad se manifiesta como un tema siempre presente (en mayor o menor grado) en las Matemáticas de todos los cursos y niveles académicos del sistema educativo.

Sobre las principales dificultades en la enseñanza de la proporcionalidad

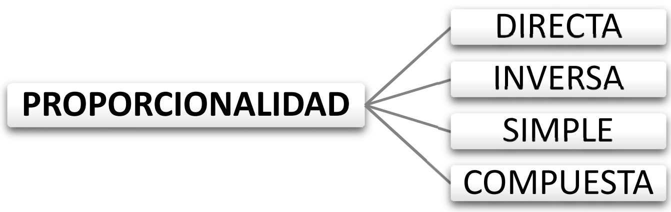
Como ya se ha mencionado en el Apartado 1, teniendo en cuenta además mi experiencia como profesor en prácticas de estos últimos meses vivida en el Prácticum, las conclusiones de *ANTONIO M. OLLER MARCÉN et al. (2013) en el artículo LA GÉNESIS HISTÓRICA DE LOS CONCEPTOS DE RAZÓN Y PROPORCIÓN Y SU POSTERIOR ARITMETIZACIÓN de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2013) 16 (3): 317-338*, ratifican lo antes mencionado en lo que escribe a continuación: *Es interesante señalar que, en un estudio realizado por los autores (Gairín y Oller, 2012), no se ha encontrado rastro de la razón entre cantidades de una misma magnitud en ningún texto de Secundaria español de los últimos 20 años. Además, no se encuentra mención alguna a una posible definición de la razón entre cantidades de distintas magnitudes. Estos aspectos dan lugar a algunos inconvenientes de cara a la comprensión de los estudiantes. Por ejemplo:*

1. *Lo que suele suceder es que se deja de lado por completo a las magnitudes para que los estudiantes se centren en la faceta puramente numérica del problema, con lo que se pierde de vista el sentido de los pasos dados para resolverlo.*
2. *La razón de proporcionalidad suele presentarse como un escalar, que carece de un significado claro en el contexto del problema.*

En ambos casos, la consecuencia fundamental es que un problema en el contexto de las magnitudes acaba transformándose es una situación en la que priman ante todo las manipulaciones meramente numéricas (recuérdese el algoritmo de la Regla de tres, por ejemplo). […] Por lo tanto, la idea de razón entre cantidades de diferentes magnitudes *puede proporcionar una visión más clara de las situaciones puesto que posee un importante significado.*

2.4. QUÉ CONTENIDOS DEBERÍAN ENSEÑARSE SOBRE LA PROPORCIONALIDAD

Queda claro por tanto que los mínimos contenidos a enseñar en relación a la proporcionalidad para el Curso de 3º de la ESO son los establecidos por el Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. No obstante podemos identificar la proporcionalidad con cuatro conceptos principales que la definen:



Así mismo, teniendo en cuenta los contenidos mínimos con respecto a ésta señalados por la normativa vigente tanto en Matemáticas como en otras disciplinas, y habiendo analizado tanto libros de texto de 3º de la ESO como bibliografía en general, podemos enumerar y/o clasificar, según su importancia, las siguientes aplicaciones de la proporcionalidad tal y como se muestra en el esquema siguiente:

Se podría por tanto pensar en agrupar la didáctica de estas aplicaciones de la proporcionalidad mediante sesiones, de tal manera que se enseñen las competencias y los conocimientos haciendo un recorrido de lo general a lo particular.

2.5. CÓMO ENSEÑAR Y EVALUAR LAS COMPETENCIAS MEDIANTE EL APRENDIZAJE DE LA PROPORCIONALIDAD

Tal y como se ha mencionado anteriormente, la necesidad del docente de relacionar constantemente las Matemáticas con el resto de disciplinas mediante la enseñanza de la proporcionalidad hace indispensable reformularse el método o el proceso de evaluación que diseñará para valorar las competencias básicas y los objetivos que deberán alcanzar los estudiantes con este aprendizaje. Para ello nos basaremos en un modelo similar al planteado por el Programa PISA tanto en las pruebas de evaluación como en la creación de ejercicios y problemas y al modelo de las pruebas CDI en la construcción de algunos de éstos últimos.

2.5.1. LAS PRUEBAS PISA

Según establece y explica el documento: PROGRAMA PISA DE LA OCDE. QUÉ ES Y PARA QUÉ SIRVE. http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

PISA es el acrónimo de Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes. Cuyo objetivo es evaluar la formación de los estudiantes cuando llegan al final de la etapa de enseñanza obligatoria, hacia los 15 años. La evaluación cubre las áreas de lectura, Matemáticas y competencia científica. PISA está diseñado para conocer las competencias, o, dicho en otros términos, las habilidades, la pericia y las aptitudes de los estudiantes para analizar y resolver problemas, para manejar información y para enfrentar situaciones que se les presentarán en la vida adulta y que requerirán de tales habilidades. PISA se concentra en la evaluación de tres áreas: competencia lectora, competencia matemática y competencia científica. La aplicación de los conocimientos en la vida adulta depende rigurosamente de la adquisición de conceptos y habilidades más amplios. PISA se centra en el reconocimiento y valoración de las destrezas y conocimientos adquiridos por los estudiantes al llegar a sus quince años.

La evaluación de competencias no se dirige a la verificación de contenidos. Se trata de una evaluación que busca identificar la existencia de ciertas capacidades, habilidades y aptitudes. La exploración del proyecto PISA se refiere a competencias específicas (lectura, Matemáticas, ciencia), detalladas y divididas en sub-competencias, dentro de cada área. La clave del concepto de competencia está en valorar la capacidad del estudiante para poner en práctica sus habilidades y conocimientos en diferentes circunstancias de la *vida. PISA examina el grado de preparación de los jóvenes para la vida adulta y, hasta cierto punto, la efectividad de los sistemas educativos.*

La competencia matemática implica la capacidad de un individuo de identificar y entender el papel que las Matemáticas tienen en el mundo. El concepto general de competencia matemática se refiere a la capacidad del estudiante para razonar, analizar y comunicar operaciones Matemáticas. Los procesos que el estudiante debe realizar corresponden con tres grados de complejidad:

1. *Procesos de reproducción: se trabaja con operaciones comunes, cálculos simples y problemas propios del entorno inmediato y la rutina cotidiana.*
2. *Procesos de conexión: involucran ideas y procedimientos matemáticos para la solución de problemas que ya no pueden definirse como ordinarios.*
3. *Procesos de reflexión: implican la solución de problemas complejos.*

Los contenidos de la evaluación de competencia matemática abarcan problemas de cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones y probabilidad. Los problemas matemáticos que se plantean están situados en diferentes contextos o situaciones: situación personal, situación educativa o laboral, situación pública y situación científica.

Los niveles de competencia en Matemáticas

Para efectuar la evaluación en el área de Matemáticas se han establecido seis niveles de competencia: <u>Nivel 6</u>: Los estudiantes que alcanzan este nivel son capaces de conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en sus investigaciones y en su elaboración de modelos para resolver problemas complejos. <u>Nivel 5</u>: En este nivel los estudiantes pueden desarrollar y trabajar con modelos para situaciones complejas. <u>Nivel 4</u>: Los estudiantes son capaces de trabajar efectivamente con modelos explícitos para situaciones complejas concretas. <u>Nivel 3</u>: Quienes se sitúan en este nivel son capaces de ejecutar procedimientos descritos claramente, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. <u>Nivel 2</u>: En el segundo nivel los estudiantes pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren únicamente de inferencias directas. <u>Nivel 1</u>: Los estudiantes son capaces de contestar preguntas que impliquen contextos familiares donde toda la información relevante esté presente y las preguntas estén claramente definidas. <u>Por debajo del nivel 1</u>: Se trata de estudiantes que no son capaces de realizar las tareas de Matemáticas más elementales que pide PISA.

Entre las fortalezas del proceso de evaluación de PISA, se encuentra la riqueza de las pruebas escritas, cuyos reactivos y preguntas proponen una gran variedad de operaciones intelectuales que permiten al estudiante mostrar sus conocimientos y habilidades. Por otra parte, la prueba permite valorar el grado de preparación de los jóvenes para utilizar sus *conocimientos y competencias al enfrentar los retos que presenta la vida real, más que el grado de dominio de un plan de estudios específico.*

En el transcurso del aprendizaje de la proporcionalidad se pretende enseñar a los estudiantes esta serie de competencias antes descritas mediante la realización de ejercicios y problemas así como de una prueba de evaluación cuya estructura y forma sea similar a las planteadas por las pruebas PISA de Matemáticas en concreto con los temas en relación a la proporcionalidad. Todos los problemas y ejercicios estarán basados las situaciones reales de los distintos ámbitos multidisciplinares antes mencionados.

2.5.2. LAS PRUEBAS CDI

Como se ha indicado anteriormente, para la creación de ejercicios y problemas planteados a los estudiantes, se tendrá en cuenta el formato de los ejercicios que sobre proporcionalidad se tratan en las pruebas CDI obligatorias para los estudiantes de Tercero de la ESO de la CAM.

Las finalidades de la prueba CDI se describen en la *RESOLUCIÓN de 16 de febrero de 2015, de las Viceconsejerías de Educación, Juventud y Deporte y de Organización Educativa, por la que se dictan instrucciones para la celebración de la Prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI) de los alumnos del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria y del primer curso del Programa de Diversificación Curricular de la Comunidad de Madrid, en el curso 2014-2015*.

Los estándares de Matemáticas de 3º de la ESO en relación a la proporcionalidad

Estos estándares están publicados en la web de la Viceconsejería de Educación, Cultura y Deportes. Información Práctica. Pruebas de Conocimientos y Destrezas indispensables:

1. *Resolver problemas en los que intervienen magnitudes directamente proporcionales mediante la regla de tres directa o planteando la igualdad de dos razones.*
2. *Detectar la existencia o inexistencia de proporcionalidad inversa en parejas de magnitudes.*
3. *Resolver problemas en los que intervienen magnitudes inversamente proporcionales.*
4. *Calcular los intereses que genera una cantidad depositada en un banco, o en situaciones de préstamo, a un determinado tanto por cierto anual (o tipo de interés).*
5. *Resolver problemas cotidianos en los que intervienen variaciones porcentuales.*

3. OBJETIVOS, HIPOTESIS Y DESCRIPCION DEL PROBLEMA

Una vez presentados los antecedentes bibliográficos en la fundamentación teórica se definirán los objetivos que se pretenden alcanzar en este TFM:

¿Cómo se puede enseñar la proporcionalidad en la ESO de manera que se pueda relacionar de forma transversal con otros aspectos relevantes tanto de la propia

Matemática como con diversos temas interdisciplinares como la economía, las ciencias, la naturaleza, la música, la pintura, la escultura, la arquitectura y los objetos y diseños de la vida cotidiana? y ¿cómo se pueden evaluar las competencias descritas anteriormente mediante el aprendizaje de la proporcionalidad mediante ejercicios y problemas similares a los que se plantean en las pruebas PISA y CDI?

4. METODOLOGIA

A continuación se hace una propuesta de UD para impartir en Tercero de la ESO cuyo título es: **"La proporcionalidad: aplicaciones y relaciones con otros campos multidisciplinares".**

4.1. PROGRAMACIÓN Y DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA: "LA PROPORCIONALIDAD: APLICACIONES Y RELACIONES CON OTROS CAMPOS MULTIDISCIPLINARES"

Aunque su alcance es mucho mayor, abarcando y relacionando paralelamente un amplio abanico de conocimientos, esta UD se podría englobar de manera general dentro del bloque de ***Números*** (Aritmética) del curso de 3º de la ESO en la asignatura de Matemáticas. Dicho bloque se compone de varias unidades según el Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. BOCM Núm. 126 de 29 de mayo de 2007. Esta UD está destinada a un grupo de 3º de la ESO.

Cómo plantear la enseñanza: Durante el transcurso de las sesiones se deben intentar salvar algunas dificultades que habitualmente surgen en el estudio de la Aritmética y en concreto de la proporcionalidad, como por ejemplo: falta de dinamismo del cálculo mental, falta de abstracción y de visión de los problemas en su conjunto, dificultad de identificar y relacionar matemáticamente los conceptos, dificultad de representar e interpretar gráficamente tanto las relaciones de proporcionalidad como aspectos y propiedades geométricas. Se busca realizar una enseñanza individualizada, activa y constructiva y un aprendizaje donde el estudiante asiente los conocimientos en una estructura mental significativa. En la mayoría de libros de texto de secundaria, la proporcionalidad se muestra con fines meramente aritméticos planteando directamente técnicas de resolución, sin la justificación adecuada, o mediante estrategias de resolución de problemas que el alumnado debe memorizar.

Con esta UD se pretende: que el estudiante sea el protagonista de su propio aprendizaje, que manipule y experimente para ir construyendo su propio conocimiento, que domine y entienda los conceptos así como las técnicas Matemáticas adecuadas, que comprenda y conozca los fundamentos así como la importancia de la proporcionalidad en todas las áreas del conocimiento que le rodea (relaciones multidisciplinares), suscitar el interés por la investigación y el autoaprendizaje de los conceptos derivados de la proporcionalidad.

¿Cuándo enseñar esta UD?: En el curso de 3º de la ESO asignado a la materia de Matemáticas. La duración temporal para impartir esta UD será de 10 sesiones de 55 min y una última sesión que corresponderá a una prueba práctica de evaluación similar a las pruebas PISA para comprobar si los estudiantes han alcanzado los objetivos y competencias propuestos.

4.2. <u>OBJETIVOS EDUCATIVOS Y PRINCIPIOS METODOLÓGICOS</u>

Contribución de la materia a la adquisición de competencias básicas

Las competencias básicas se conciben como el conjunto de habilidades cognitivas, procedimentales y actitudinales que pueden y deben ser alcanzadas a lo largo de la enseñanza obligatoria por todo el alumnado, respetando las características individuales. Estas competencias son aquellas que todas las personas precisan para su realización y desarrollo personal, así como para la ciudadanía activa, la inclusión social y el empleo. El desarrollo de las competencias básicas debe permitir a los estudiantes integrar sus aprendizajes, poniéndolos en relación con distintos tipos de contenidos, utilizar esos contenidos de manera efectiva cuando resulten necesarios y aplicarlos en diferentes situaciones y contextos. Se precisa por tanto orientar el aprendizaje en el desarrollo de las *COMPETENCIAS BÁSICAS* recogidas en el *ANEXO I* del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria:

Competencia en comunicación lingüística

- *Utilizar la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de ideas.*
- *Entender enunciados para resolver problemas.*
- *Saber expresar los procedimientos utilizados en la resolución de un problema.*
- *Transmitir conjeturas utilizando el léxico propio de las Matemáticas.*
- *Valorar el lenguaje sintético, simbólico y abstracto del lenguaje matemático.*
- *Ser capaz de extraer información numérica de un texto dado.*
- *Expresar ideas y conclusiones, que contengan información numérica, con claridad.*
- *Saber relacionar la información de un texto con los conceptos numéricos.*
- *Entender el lenguaje algebraico como un lenguaje en sí mismo, con su vocabulario y sus normas.*
- *Saber describir correctamente una figura geométrica y sus elementos.*
- *Saber expresar explicaciones científicas basadas en los conceptos geométricos aprendidos.*

Competencia matemática

- *Interpretar, describir la realidad y actuar sobre ella.*
- *Razonar matemáticamente.*
- *Comprender una argumentación matemática.*
- *Expresarse y comunicarse en lenguaje matemático.*
- *Utilizar las herramientas adecuadas para obtener conclusiones y reducir la incertidumbre para enfrentarse a situaciones cotidianas.*

Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico

- *Discriminar las formas, relaciones y estructuras geométricas.*
- *Desarrollar la visión espacial.*
- *Transferir formas y representaciones entre el plano y el espacio.*
- *Elaborar modelos identificando las características más relevantes de una situación real para representarla simbólicamente.*
- *Determinar pautas de comportamiento para poder hacer predicciones sobre la evolución, la precisión y las limitaciones de un modelo.*
- *Valorar los números y sus operaciones como medio para describir acontecimientos cotidianos.*
- *Reconocer las distintas figuras geométricas en el plano o en el espacio en elementos del mundo natural.*
- *Utilizar los conocimientos sobre áreas, perímetros y volúmenes para describir distintos fenómenos de la naturaleza.*
- *Utilizar la información proporcionada por tablas y gráficas, o por datos estadísticos, para describir elementos de la realidad.*

Tratamiento de la información y competencia digital

- *Incorporar las herramientas tecnológicas como recursos didácticos para el aprendizaje y para la resolución de problemas.*
- *Utilizar los lenguajes gráfico y estadístico para interpretar mejor la realidad expresada en los medios de comunicación.*
- *Usar la calculadora como herramienta que facilita los cálculos mecánicos.*
- *Conocer qué tipo de información nos aportan los números.*
- *Saber utilizar la calculadora como ayuda en los cálculos matemáticos.*
- *Entender el álgebra como un lenguaje codificado.*
- *Utilizar programas informáticos como ayuda en la resolución de problemas donde intervienen áreas y perímetros de figuras planas.*
- *Utilizar programas informáticos que ayudan a automatizar los cálculos estadísticos y a elaborar gráficas.*

Competencia social y ciudadana

- *Describir los fenómenos sociales mediante el análisis funcional y la estadística.*
- *Aportar criterios científicos para predecir y tomar decisiones.*
- *Valorar los puntos de vista ajenos como formas alternativas para abordar una situación.*
- *Comprender el procedimiento de aproximación de números como medio de interpretar información dada.*
- *Reconocer el valor de los números en nuestra sociedad.*
- *Aprovechar los conocimientos adquiridos para explicar situaciones Matemáticas a otras personas.*
- *Dominar conceptos matemáticos cotidianos importantes para las relaciones humanas.*
- *Valorar las estadísticas como medio de conocimiento y de mejora de la sociedad.*

Competencia cultural y artística

- *Describir y comprender el mundo que nos rodea.*
- *Apreciar la belleza de las estructuras artísticas creadas con formas geométricas y simetrías.*
- *Aprovechar el conocimiento de geometría plana y espacial para crear o describir distintos elementos artísticos.*
- *Reflexionar sobre la forma de hacer Matemáticas en otras culturas (antiguas o actuales) como complementarias de las nuestras.*
- *Utilizar las potencias como medio de descripción de elementos artísticos con regularidades geométricas.*
- *Reconocer elementos numéricos en distintas manifestaciones artísticas.*
- *Conocer distintas unidades de medida tradicionales y valorar las culturas en que se utilizaban.*

Competencia para aprender a aprender

- *Reflexionar sobre la necesidad de adquirir conocimientos sobre números para poder avanzar en su aprendizaje.*
- *Valorar el aprendizaje de razonamientos matemáticos y procedimientos adquiridos como fuente de conocimientos futuros.*
- *Aprender a autoevaluar los conocimientos adquiridos.*
- *Ser consciente de sí ha planteado u operado mal, en función del contexto del problema.*
- *Aprender a valorar el álgebra como medio de simplificar procedimientos y razonamientos.*

Autonomía e iniciativa personal

- *Por medio de los procesos propios de la resolución de problemas contribuir a fomentar la autonomía e iniciativa personal.*
- *Planificar estrategias y asumir retos que contribuyan a convivir con la incertidumbre.*
- *Controlar los procesos de toma de decisión.*
- *Fomentar la autonomía, la perseverancia, la sistematización, la reflexión crítica y la habilidad para comunicar los resultados del propio trabajo.*
- *Analizar procesos matemáticos relacionados con números y concluir razonamientos inacabados.*
- *Decidir qué procedimiento es más válido ante un problema planteado.*
- *Elegir la mejor traducción a lenguaje algebraico como ayuda para resolver problemas.*

Objetivos generales de etapa

En el *Artículo 11* del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, se enumeran los OBJETIVOS DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATIORIA: *La Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los estudiantes y las alumnas las capacidades que les permitan:*

a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos […]
b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo […]
c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos […]
d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos […]
e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información […]
f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado […]
g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo […]

h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito […]
i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras […]
j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura […]
k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros […]
l) Apreciar la creación artística […]

Objetivos específicos de área

En el *ANEXO* del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, se enumeran los OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS EN LA ESO: *La enseñanza de las Matemáticas en esta etapa tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:*

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo […]
2. Aplicar con soltura y adecuadamente las herramientas Matemáticas […]
3. Reconocer y plantear situaciones […]
4. Detectar los aspectos de la realidad que sean cuantificables […]
5. Identificar los elementos matemáticos […]
6. Identificar las formas planas o espaciales que se presentan en la vida diaria […]
7. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos […]
8. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana […]
9. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas […]
10. Manifestar una actitud positiva […]
11. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes […]
12. Valorar las Matemáticas como parte integrante de nuestra cultura […]

Objetivos específicos de esta UD

- Dominar, plantear y entender las relaciones de proporcionalidad simple (directa e inversa) y compuesta en todas sus variedades así como la razón de proporcionalidad.
- Resolver con destreza problemas de repartos proporcionales.
- Representar la proporcionalidad mediante funciones y gráficas.
- Reconocer las situaciones donde no hay proporcionalidad.
- Plantear y resolver problemas de mezclas, velocidades y caudales aplicando la proporcionalidad.
- Dominar con destreza el cálculo con porcentajes.
- Resolver y plantear problemas del mundo económico: interés simple y compuesto.
- Representar gráficos estadísticos aplicando la proporcionalidad.
- Calcular medidas y realizar estimaciones mediante la proporcionalidad.
- Dominar el manejo de las escalas gráficas y/o numéricas en la interpretación de planos, dibujos o mapas.
- Interpretar y resolver problemas de geometría aplicando la proporcionalidad.
- Reconocer, identificar y construir geométricamente los distintos aspectos de la proporción áurea en la geometría.

- Reconocer y analizar tanto gráfica como numéricamente distintos casos de proporcionalidad en los objetos y diseños de la vida cotidiana.
- Reconocer y analizar tanto gráfica como numéricamente la proporción áurea y sus relaciones en la naturaleza, en la música, en el arte y en la arquitectura.

4.3. CONTENIDOS: CONCEPTOS, PROCEDIMIENTOS Y ACTITUDES

Durante el desarrollo de esta UD, se impartirán los siguientes contenidos:

Conceptos y Procedimientos

1. **Proporcionalidad simple y compuesta:** Introducción a la proporcionalidad. Magnitudes y unidades de medida. Magnitudes directamente proporcionales. Magnitudes inversamente proporcionales. Proporcionalidad compuesta.
2. **Repartos proporcionales:** Repartos directamente proporcionales. Repartos inversamente proporcionales.
3. **La proporcionalidad en las funciones y gráficas. Aplicaciones de la proporcionalidad a los problemas del mundo físico:** Representación gráfica de la proporcionalidad directa entre dos magnitudes. Representación gráfica de la proporcionalidad inversa entre dos magnitudes. Problemas de mezclas y aleaciones. Problemas de velocidades. Problemas de caudales.
4. **Porcentajes. Aplicaciones de la proporcionalidad en la economía:** Tanto por ciento de una cantidad. Porcentaje correspondiente a una proporción. Aumentos y disminuciones porcentuales. Variaciones porcentuales encadenadas. Interés simple. Interés compuesto.
5. **La proporcionalidad en los gráficos estadísticos. Aplicaciones de la proporcionalidad en la medida y estimación. Concepto de escala:** Tabla de frecuencias. Diagrama de barras. Histograma y polígono de frecuencias. Diagrama de sectores. Pictogramas. Estimación y proporcionalidad. Concepto de escala. Estimación del tamaño de una población por muestreo mediante la proporcionalidad.
6. **Aplicaciones de la proporcionalidad en la geometría. Áreas y volúmenes de figuras proporcionales:** El Teorema de Tales. Potencia de un punto. El Teorema de la altura y el Teorema del cateto. Polígonos semejantes. Áreas y volúmenes de figuras proporcionales.
7. **La proporción áurea:** Razón áurea y segmento áureo. La proporción áurea en el pentágono regular. La proporción áurea en el decágono, en otras figuras y en poliedros regulares. El rectángulo áureo y la espiral áurea. La sucesión de Fibonacci y el número áureo.

8. **La proporcionalidad en los objetos y diseños de la vida cotidiana. La proporción áurea en la naturaleza:** La proporcionalidad en las hojas de papel. La proporción áurea en los objetos y diseños de la vida cotidiana. Armonías humanas. El número áureo en la naturaleza.
9. **La proporción áurea en la música y en el arte: pintura y escultura:** La armonía pitagórica en la música. Las relaciones entre el número áureo y las proporciones musicales. La proporción áurea en los instrumentos. La proporción áurea en: el arte egipcio, arte clásico griego, arte gótico, arte renacentista, arte barroco, arte en el siglo XVII (Rococó), arte del siglo XIX y arte del siglo XX.
10. **La proporción áurea en la arquitectura:** Arquitectura megalítica, egipcia, arquitectura clásica: Grecia y Roma, gótica, renacentista, rococó y arquitectura de los ss. XIX y XX.

Actitudes

- Curiosidad e interés por la proporcionalidad y las relaciones tanto matemáticas como geométricas entre cantidades y/o datos conocidos o desconocidos.
- Confianza en las propias capacidades para plantear y resolver problemas de manera algebraica y geométrica donde la proporcionalidad esté presente.
- Orden y limpieza tanto en la ejecución como en descripción de los pasos a la hora de resolver problemas tanto de manera escrita como de manera gráfica. Síntesis a la hora de expresar resultados.
- Interés por las estrategias y procedimientos de resolución de problemas basados en la proporcionalidad. Hábito y responsabilidad en la autocomprobación de las respuestas obtenidas de los distintos problemas y ejercicios que se realicen.

4.4. IDEAS PREVIAS DEL ALUMNADO SOBRE EL TEMA. CARACTERIZACIÓN Y DETECCIÓN

Se espera que los estudiantes de Tercer Curso de la ESO tengan adquiridos los contenidos y conocimientos que sobre proporcionalidad (referentes a los campos del Aritmética, Álgebra, Geometría, Funciones y Estadística) figuran en el Currículo de la ESO, sobre todo de 2º de la ESO tal y como especifica el *Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria*.

Cabe esperar además que, si el IES donde se imparta esta UD oferta la asignatura de Ampliación o Refuerzo de Matemáticas, los estudiantes que la estén cursando o que el año anterior la cursaron, no tengan mayores complicaciones a la hora de alcanzar los objetivos previstos en ésta.

También es de esperar encontrarse con estudiantes que tengan unos conocimientos mínimos o insuficientes sobre el tema debido en su mayor parte a la falta de estudio y motivación en los cursos anteriores, e incluso estudiantes que titularon a 3º de la ESO con la asignatura de Matemáticas de 2º de la ESO suspensa. De este modo, se debería tratar de orientar esta UD dando siempre al principio las nociones más básicas e indispensables y siempre con la ayuda de ejemplos y ejercicios prácticos en orden creciente de dificultad. Así mismo, y al principio de cada actividad cuando se precise, se deberán intentar detectar las ideas previas que el alumnado tiene sobre el tema en cuestión que se vaya a impartir.

4.5. ESTRATEGIA DE MOTIVACIÓN INICIAL

En la primera sesión se tratará de introducir a los estudiantes en la importancia y la necesidad de comprender la proporcionalidad y de cómo es necesario dominar el planteamiento y la interpretación de las relaciones proporcionales entre datos y magnitudes no sólo en el ámbito de las Matemáticas, sino también en otras muchas disciplinas. Para ello se hará un breve recorrido histórico de introducción por las Matemáticas en donde aparezca el concepto de proporcionalidad destacando que en todas las civilizaciones siempre ha existido la necesidad universal de resolver problemas de la vida cotidiana relacionados con ésta. De la misma forma, en mayor o menor medida, a lo largo del tiempo, la humanidad siempre ha tenido un interés constante hacia los conceptos y los problemas prácticos de la proporcionalidad, que como ya se ha mencionado, no solo está presente en la Matemática sino también en otros campos multidisciplinares.

No obstante a lo largo de todos los contenidos y actividades de esta UD, por cada nuevo contenido, se tratará de motivar al estudiante en la importancia de las múltiples aplicaciones de la proporcionalidad para resolver problemas y comprender otros aspectos que se pueden dar en cualquier ámbito disciplinar. Los estudiantes deberán desarrollar las competencias necesarias en el arte de plantear y desarrollar expresiones mediante relaciones de proporcionalidad de distinta naturaleza. Es también por ello que se hace indispensable que el estudiante sepa expresar algebraicamente así como representar gráficamente las relaciones de proporcionalidad entre datos o cantidades tanto desconocidas como conocidas. Por ello será de vital importancia que, una vez éste domine el arte de la “algebrización” de problemas, sepa también construir y representar estas relaciones entre las diversas magnitudes y parámetros así como sistemas de ecuaciones sencillos mediante el mismo procedimiento, además de resolverlos de una manera ordenada, metódica y eficaz.

4.6. ACTIVIDADES

Para la UD se han programado una serie de actividades que se desarrollarán en un total de 11 sesiones dedicando la última sesión a la prueba de evaluación. Dichas actividades serán explicadas con más detalle en el Apartado 4.9.

4.7. MATERIALES Y RECURSOS DIDÁCTICOS

Libro de texto de la asignatura y bibliografía en general

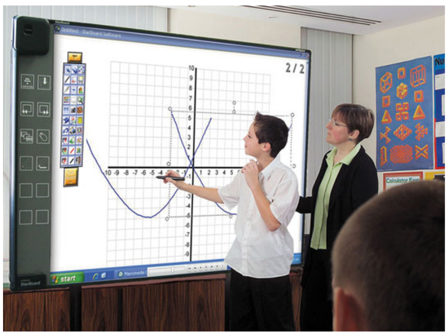
Aunque no es intención de esta UD el suministrar un libro de texto al estudiante de Matemáticas de 3º de la ESO, se han utilizado varios libros de texto y otros libros en general para la elaboración de algunos contenidos teóricos así como ejercicios y problemas. La bibliografía se detalla en el Apartado 6.

Programas informáticos de Matemáticas

GeoGebra
Software Dinámico de Matemáticas

Se trata de un software libre de geometría dinámica y álgebra centrado en el tratamiento dinámico de objetos geométricos. Resulta muy útil para abordar los conceptos de geometría trabajados desde una forma dinámica e interactiva. Este programa se utiliza como apoyo a la representación gráfica en la parte de aplicaciones de la proporcionalidad en la geometría y la proporción áurea.

Pizarra Digital Interactiva (PDI)



Se trata de un sistema integral de proyección multimedia, de gran utilidad y apoyo tanto para explicar como para poder mostrar imágenes y/o videos procedentes del computador. Además, todo aquello que escribe el profesor, así como los ejercicios resueltos en clase podrán ser guardados en ficheros en formato *pdf* o similar dentro del campus virtual (si estuviera operativo en el IES) para su posterior consulta y repaso por parte de los estudiantes.

Fichas resumen

En cada sesión, y al finalizar la explicación de la mayoría de las actividades les será entregado a los estudiantes una ficha resumen de elaboración propia sobre los aspectos teóricos más importantes tratados en clase incluyendo algún caso práctico resuelto paso a paso. Estas fichas resumen, que pueden consultarse en el ANEXO III de este TFM, han sido elaboradas con material bibliográfico diverso así como fuentes de Internet las cuales se mencionan en el Apartado 6.

Hojas de ejercicios y problemas

En cada sesión, y al finalizar la explicación de la mayoría de las actividades, les será entregado a los estudiantes una hoja de ejercicios y problemas, de elaboración propia, sobre los aspectos prácticos más importantes a ejercitar, trabajar y desarrollar como tarea individual tanto en clase como en casa. Estas hojas de ejercicios y problemas, que pueden consultarse en el ANEXO IV de este TFM, han sido elaboradas con material bibliográfico diverso así como fuentes de Internet las cuales se mencionan en el Apartado 6. Los ejercicios y problemas que se plantean en estas hojas son similares a los planteados en las pruebas CDI y en las pruebas de evaluación PISA.

4.8. EVALUACIÓN DEL ALUMNADO Y DEL PROCESO

Procedimientos e instrumentos de evaluación

Los procedimientos e instrumentos de evaluación estarán basados en los siguientes apartados:

1. **Observación sistemática del estudiante.** Este apartado corresponde a la actitud y el comportamiento del estudiante. Se debe distinguir entre la actitud del estudiante frente al aprendizaje en sí mismo, y el que tiene hacia la propia asignatura.
2. **Análisis de las producciones del estudiante.** En este apartado se tendrá en cuenta el cuaderno de clase, la resolución de ejercicios en casa, la exposición oral de temas, resolución de ejercicios en clase, trabajos, etc. Se valorará especialmente la elaboración del cuaderno de clase, que será una herramienta de estudio en formato de papel, al no haber asignación de libro de texto en dicho formato, y disponer, en su lugar, de las fichas resumen y las hojas de ejercicios y problemas. Además, tal y como se ha indicado

anteriormente, los ejercicios y problemas que se plantean en estas hojas son similares a los planteados en las pruebas CDI y en las pruebas de evaluación PISA.

3. **Pruebas de evaluación modelo PISA.** Aquí se incluirán las pruebas sobre competencias, destrezas y conocimientos, realizadas en papel a modo de pruebas escritas. Se realizará al menos una de estas pruebas por evaluación.

Criterios de evaluación

1. Entiende el concepto de proporcionalidad. Sabe identificar y relacionar correctamente magnitudes con unidades de medida. Realiza cambios entre unidades de medida de forma correcta.
2. Plantea y resuelve problemas de proporcionalidad simple directa e inversa. Entiende y aplica el concepto de razón de proporcionalidad.
3. Plantea y resuelve problemas de proporcionalidad compuesta: directa-directa, inversa-inversa y mixta.
4. Sabe realizar repartos directa e inversamente proporcionales.
5. Sabe representar gráficamente la proporcionalidad directa e inversa entre dos magnitudes.
6. Sabe identificar si existe o no existe relación de proporcionalidad entre diversas magnitudes y/o parámetros.
7. Plantea y resuelve problemas relacionados con mezclas y aleaciones.
8. Plantea y resuelve problemas relacionados con velocidades.
9. Plantea y resuelve problemas relacionados con caudales.
10. Calcula el tanto por ciento de una cantidad mediante cálculo numérico y mediante cálculo mental.
11. Calcula el porcentaje correspondiente a una proporción.
12. Plantea y resuelve problemas de aumentos y disminuciones porcentuales
13. Plantea y resuelve problemas de variaciones porcentuales encadenadas.
14. Plantea y resuelve problemas económicos aplicando la definición de interés simple.
15. Plantea y resuelve problemas económicos aplicando la definición de interés compuesto.
16. Elabora correctamente tablas de frecuencias.
17. Se vale de la proporcionalidad para representar gráficamente diagramas de barras, histogramas y polígonos de frecuencias.
18. Se vale de la proporcionalidad para representar gráficamente diagramas de sectores.
19. Se vale de la proporcionalidad para crear pictogramas.
20. Se vale de la proporcionalidad para realizar estimaciones de medidas y cantidades.
21. Aplica con soltura el concepto de escala en planos, mapas, gráficos o imágenes.

22. Plantea y resuelve problemas mediante el uso de la proporcionalidad en la estimación del tamaño de una población por muestreo.
23. Aplica con soltura el Teorema de Tales en la resolución de problemas geométricos.
24. Calcula y representa gráficamente las distintas situaciones de la potencia de un punto entendiendo y aplicando la proporcionalidad inversa.
25. Plantea y resuelve problemas geométricos aplicando el Teorema de la altura y el Teorema del cateto.
26. Identifica y representa polígonos semejantes.
27. Calcula áreas y volúmenes de figuras semejantes.
28. Representa tanto numérica como gráficamente la razón áurea en un segmento.
29. Representa gráfica y numéricamente las proporciones áureas que se encuentran entre las distintas partes de un pentágono regular.
30. Representa gráfica y numéricamente las relaciones áureas que se encuentran entre las distintas partes del decágono y hexágono.
31. Conoce la existencia del número áureo en los poliedros regulares.
32. Representa gráfica y numéricamente el rectángulo áureo y la espiral áurea.
33. Representa numéricamente y de forma gráfica la sucesión de Fibonacci y sabe relacionarla con el número áureo.
34. Aplica con soltura la proporción $\sqrt{2}$ en el planteamiento y resolución de problemas y situaciones relacionadas con el formato DIN de las hojas de papel.
35. Reconoce, identifica y justifica de forma geométrica y numérica la proporción áurea en los objetos y diseños de la vida cotidiana.
36. Reconoce, identifica y justifica de forma geométrica y numérica la presencia del número áureo en las proporciones humanas.
37. Reconoce, identifica y justifica de forma geométrica y numérica el número áureo en ejemplos de la naturaleza.
38. Entiende y razona el concepto de la armonía pitagórica en la música así como las relaciones entre el número áureo y las proporciones musicales.
39. Identifica la presencia de proporciones áureas entre las partes de los instrumentos más comunes.
40. Reconoce, identifica y justifica tanto de forma geométrica como numérica la presencia de la proporción áurea en los principales ejemplos de la historia del arte (pintura y escultura): egipcio, clásico griego, gótico, renacentista, barroco, rococó y ss XIX y XX.
41. Reconoce, identifica y justifica de forma geométrica y numérica la presencia de la proporción áurea en los principales ejemplos de la historia de la arquitectura: megalítica, egipcia, clásica griega y romana, gótica, renacentista, rococó y ss. XIX y XX.

Criterios de calificación

Se recomienda que los pesos asignados sean los siguientes:

- El 70% correspondiente a la prueba de evaluación de esta UD.
- El 30% correspondiente al resto, siendo: el 15% correspondiente a las producciones del estudiante (cuaderno de trabajo Matemáticas) y el 15% correspondiente al análisis sistemático del estudiante (actitud, interés, comportamiento, asistencia, participación, etc.)

Se tendrán en cuenta los criterios de evaluación del departamento de Matemáticas (en el que se imparta esta UD) en los siguientes casos: para la realización de las recuperaciones por bloques o por evaluaciones, para los estudiantes que han suspendido el bloque (o la evaluación, según el caso) si tienen o no que presentarse al examen de recuperación o examen global, que será final en caso de que se trate de la última evaluación, para obtener la nota global del bloque (o de la evaluación), para la elaboración o no de controles para calificar el porcentaje correspondiente al 30%, para los estudiantes que no hayan superado la materia de esta forma, si deberán realizar o no una prueba extraordinaria de todos los contenidos del curso en septiembre. Si en la calificación de este examen se tendrá en cuenta sólo los conocimientos y procedimientos que se demuestren en ella. Si la nota de la convocatoria extraordinaria de septiembre coincidirá con la calificación de la prueba.

Evaluación del proceso

Con el objetivo de hacer una evaluación del proceso se recomienda seguir las siguientes pautas o estrategias como por ejemplo: al inicio de cada actividad se tantearán los conocimientos previos de los estudiantes realizando alguna pregunta abierta a toda la clase. Al final de la explicación de cada actividad, los estudiantes realizarán varios ejercicios y problemas prácticos en su cuaderno como trabajo de aula, los cuales serán corregidos en la pizarra por ellos mismos y mediante la supervisión del profesor. Además podrán hacerse preguntas relacionadas con aspectos prácticos de los ejercicios. Finalmente, el resto de ejercicios y problemas de la hoja correspondiente a cada actividad serán mandados como tarea para hacer en su cuaderno de Matemáticas de forma individual y para corregir al inicio de la sesión siguiente en los primeros minutos de clase.

Para la evaluación de esta UD el estudiante tendrá que realizar lo siguiente:

- **Elaborar un cuaderno personal de Matemáticas:** En el que deberá tomar apuntes de cada sesión. Tendrá que plantear, resolver y corregir los ejercicios de cada hoja de ejercicios y problemas correspondientes a cada actividad (si los hubiera). Este cuaderno deberá ser de tamaño DIN A4 de hojas cuadriculadas encuadernadas en formato espiral. Deberá estar cuidado, limpio y ordenado, bien estructurado. Con el nombre, curso y grupo del estudiante anotado en la tapa principal. Los ejercicios y problemas deberán figurar con sus enunciados y podrán estar resueltos a lápiz. El estudiante los corregirá en rojo, marcando posteriormente mediante un "✓" aquellos que hayan sido corregidos en clase. Dicho cuaderno será corregido por el profesor. Las hojas de ejercicios y problemas pueden encontrarse en el ANEXO IV de este TFM.

- **Realizar una prueba escrita de evaluación final:** Tendrá una duración de 55 – 60 minutos. Dicha prueba tendrá lugar al finalizar la UD y consistirá en una serie de preguntas y ejercicios prácticos modelo PISA sobre el contenido de ésta. Estos ejercicios finales pueden encontrarse en el ANEXO V de este TFM.

4.9. DESCRIPCIÓN DE LAS SESIONES: DESARROLLO Y SECUENCIA DE LAS ACTIVIDADES

A continuación se describen las sesiones, duración y desarrollo de las actividades. Tanto los objetivos didácticos, como los materiales y recursos empleados para cada una de las actividades, se pueden consultar en el ANEXO II de este TFM.

4.9.1. SESIÓN 1: PROPORCIONALIDAD SIMPLE Y COMPUESTA

ACTIVIDAD 1: INTRODUCCIÓN A LA PROPORCIONALIDAD. MAGNITUDES Y UNIDADES DE MEDIDA

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Para motivar al alumnado se propone iniciar la sesión mencionando un brevísimo recorrido histórico de introducción por las Matemáticas en donde aparezca el concepto de proporcionalidad. Explicaremos que en todas las civilizaciones siempre ha existido la necesidad universal de resolver problemas de la vida cotidiana relacionados con la proporcionalidad. El primer matemático en reflexionar de forma teórica sobre la proporcionalidad fue Pitágoras (s. VI a.C.). Más tarde, Euclides (s. IV a.C.) estudió la teoría de las proporciones el libro V de su tratado *Elementos*. Será mucho más tarde, en el s. XV d.C., cuando, en el Renacimiento, vuelven a estudiarse y a tratarse los conceptos y los problemas prácticos de la proporcionalidad por el italiano Luca Paciolli, quien es considerado el fundador de la contabilidad, en un libro sobre *Aritmética, geometría, proporciones y proporcionalidad*. Posteriormente se entregará al alumnado un calendario de la UD con la metodología, actividades, objetivos y criterios de evaluación. Además, proyectaremos y explicaremos un mapa conceptual de la UD, tanteando los conocimientos previos de los estudiantes. Para entrar en materia y mediante una clase magistral participativa, pasaremos a recordar y repasar el concepto de magnitud.

Posteriormente haremos lo mismo con el concepto de unidad de medida. Tendremos especial cuidado a la hora de repasar estas definiciones siempre mediante ejemplos de la vida cotidiana, para posteriormente recordar a los estudiantes la definición formal de ambos conceptos. Para ello usaremos la primera parte del video *Las aventuras de Troncho y Poncho: proporcionalidad*, en la que explica el concepto de magnitud. Posteriormente repartiremos la hoja de ejercicios y problemas 1 para resolver algunos en clase y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 2: MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Duración: 15 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad tanteando los conocimientos de los estudiantes sobre los conceptos clave de la proporcionalidad directa. Posteriormente proyectaremos el vídeo anterior, la parte que habla de estos conceptos. Insistiremos en la necesidad de dominar la técnica de la regla de tres entendiendo el fundamento de la razón de proporcionalidad directa. Se pretende que los estudiantes alcancen la confianza suficiente y aumente su destreza en el manejo de técnicas aritméticas para resolver problemas relacionados con la proporcionalidad simple directa. Posteriormente repartiremos la hoja resumen 1 y la hoja de ejercicios y problemas 2 para resolver algunos en clase y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 3: MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Duración: 15 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad tanteando los conocimientos de los estudiantes sobre los conceptos clave de la proporcionalidad inversa. Posteriormente proyectaremos el vídeo anterior, la parte que habla de estos conceptos. Insistiremos en la necesidad de dominar la técnica de la regla de tres entendiendo el fundamento de la razón de proporcionalidad inversa. Se pretende que los estudiantes alcancen la confianza suficiente y aumente su destreza en el manejo de técnicas aritméticas para resolver problemas relacionados con la proporcionalidad simple inversa. Posteriormente continuaremos con los problemas de la hoja de ejercicios y problemas 2 para resolver algunos en clase y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 4: PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Duración: 20 minutos. **Desarrollo:** Al comienzo de esta actividad insistiremos en la necesidad de comprender y saber calcular la razón de proporcionalidad para cada uno de los casos antes mencionados. Mostraremos a los estudiantes mediante ejemplos sencillos cómo se pueden resolver éstos mediante la técnica de la regla de tres compuesta o mediante la reducción a la unidad que implica hallar la constante de proporcionalidad antes mencionada. En cualquier caso aclararemos a los estudiantes que el fundamento de ambas técnicas es el mismo solo que visto desde diferentes perspectivas. Posteriormente repartiremos la ficha resumen 2 y la hoja de ejercicios y problemas 3 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

4.9.2. SESIÓN 2: REPARTOS PROPORCIONALES

ACTIVIDAD 5: REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Duración: 25 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos la sesión tanteando los conocimientos previos del alumnado sobre la proporcionalidad directa e inversa relacionándolo con sendos ejemplos de reparto directo e inverso sencillos. A continuación escribiremos mediante un esquema ordenadamente en la pizarra cómo organizar la información en los problemas de repartos directamente proporcionales. Prestaremos especial atención en identificar la cantidad a repartir y el total entre lo que se va a repartir. Explicaremos el cálculo de la cantidad unitaria a repartir para posteriormente calcular justificadamente el reparto correspondiente. Posteriormente repartiremos la ficha resumen 3 y la hoja de ejercicios y problemas 4 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 6: REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Duración: 30 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad representando mediante un esquema ordenado en la pizarra cómo organizar la información en los problemas de repartos inversamente proporcionales. Prestaremos especial atención en identificar la cantidad a repartir y el total entre lo que se va a repartir. Explicaremos el cálculo de la cantidad unitaria a repartir para posteriormente calcular justificadamente el reparto. Continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 4 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

4.9.3. SESIÓN 3: LA PROPORCIONALIDAD EN LAS FUNCIONES Y GRÁFICAS. APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD A LOS PROBLEMAS DEL MUNDO FÍSICO

ACTIVIDAD 7: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA ENTRE DOS MAGNITUDES

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Se propone iniciar esta sesión tanteando los conocimientos previos del alumnado sobre la ecuación de una recta así como su representación en el diagrama cartesiano. Después introduciremos mediante un dibujo en la pizarra o bien mediante la herramienta GeoGebra la relación gráfica que existe entre la ecuación de una recta y la proporcionalidad directa entre dos magnitudes: dibujaremos dos rectángulos que comparten la misma diagonal para posteriormente introducir la recta cuya pendiente es la razón de proporcionalidad y que pasa por el origen do coordenadas. Al final generalizaremos la ecuación de la recta relacionando ambas magnitudes con la propia ecuación. Después repartiremos la ficha resumen 4 y la hoja de ejercicios y problemas 5 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 8: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PROPORCIONALIDAD INVERSA ENTRE DOS MAGNITUDES

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad explicando mediante un dibujo en la pizarra o bien mediante la herramienta GeoGebra la relación gráfica que existe entre la proporcionalidad inversa entre dos magnitudes y una hipérbola: dibujaremos dos rectángulos que comparten la misma área para posteriormente introducir la hipérbola que justifica que la razón de proporcionalidad es aquella tal que hace que ambos rectángulos tengan sus áreas constantes o iguales. Al final generalizaremos la ecuación de la hipérbola relacionando ambas magnitudes en la propia ecuación. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 5 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 9: PROBLEMAS DE MEZCLAS Y ALEACIONES

Duración: 15 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad tanteando la destreza de los estudiantes en la identificación de unidades de medida así como en el cambio de unidades y sobre el cálculo de porcentajes. Mediante un ejemplo sencillo sobre mezclas insistiremos en la necesidad de organizar la información. Para ello representaremos una tabla que recoja cada dato correspondiente a cada magnitud junto con su unidad de medida y que identifique aquellos datos que se piden calcular para la mezcla en cuestión. Insistiremos en la necesidad de dominar también las operaciones con porcentajes ya que éstos estarán muy presentes en este tipo de problemas. Después repartiremos la ficha resumen 5 y la hoja de ejercicios y problemas 6 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 10: PROBLEMAS DE VELOCIDADES

Duración: 15 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad recordando a los estudiantes las magnitudes que intervienen en este tipo de problemas así como sus unidades de medida más comunes: distancia, tiempo y velocidad. Aprovecharemos para repasar el concepto de velocidad y de cómo se relaciona con el tiempo y la distancia. Después pasaremos a resolver un ejemplo de problema de encuentros. Aclararemos a los estudiantes que pueden existir variaciones tanto en su forma de plantearse así como en las incógnitas buscadas. Dibujaremos un esquema sencillo en la pizarra donde se organicen los datos e incógnitas del problema y lo iremos resolviendo paso por paso. Posteriormente pasaremos a resolver un ejemplo sencillo de problema de alcances remarcando los mismos puntos que en el anterior. A continuación continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 6 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 11: PROBLEMAS DE CAUDALES

Duración: 15 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad recordando a los estudiantes las magnitudes que intervienen en este tipo de problemas así como sus unidades de medida más comunes: volumen, tiempo y caudal. Aprovecharemos para repasar el concepto de caudal y de cómo se relaciona con el tiempo y el volumen. Después pasaremos a resolver un ejemplo de problema de llenado. Aclararemos a los estudiantes que pueden existir variaciones tanto en su forma de plantearse así como en las incógnitas buscadas. Dibujaremos un esquema sencillo en la pizarra donde se organicen los datos e incógnitas del problema y lo iremos resolviendo paso por paso. Posteriormente pasaremos a resolver un ejemplo sencillo de problema de vaciado remarcando los mismos puntos que en el anterior. A continuación continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 6 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

4.9.4. SESIÓN 4: PORCENTAJES. APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ECONOMÍA

ACTIVIDAD 12: TANTO POR CIENTO DE UNA CANTIDAD

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta sesión haciendo una breve mención histórica de los porcentajes: el símbolo del %. *El signo del % apareció en el s. XVI* *a partir de la abreviatura de ciento (cto) mediante una deformación de ésta. Un siglo después era comúnmente aceptado y utilizado el símbolo en el sentido actual*. A continuación pasaremos a recordar la expresión del tanto por ciento de una cantidad dada así como la fracción equivalente al tanto por ciento. Después se realizarán algunos ejemplos sencillos de cómo calcular el % de una cantidad cualquiera insistiendo en la importancia de efectuar ciertas operaciones mediante el cálculo mental. Después repartiremos la ficha resumen 6 y la hoja de ejercicios y problemas 7 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 13: PORCENTAJE CORRESPONDIENTE A UNA PROPORCIÓN

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad explicando paso a paso y con ayuda de la representación gráfica o mediante un esquema en la pizarra el fundamento para calcular correctamente el % que representa una parte de una cierta magnitud con respecto a un total de la misma. De este modo haremos comprender al estudiante la vinculación directa de éste cálculo con la relación de proporcionalidad directa entre la magnitud en cuestión y el %. Prestaremos especial atención a la constante de proporcionalidad directa. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 7 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 14: AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad proponiendo un ejemplo sencillo que represente un enunciado típico de problema de aumentos porcentuales. Prestaremos especial atención en identificar la cantidad inicial, cantidad final y el aumento porcentual. Mediante el proceso de sacar factor común, explicaremos el concepto de índice de variación poniendo especial énfasis en las operaciones con fracciones así como con números decimales. Por último relacionaremos el índice de variación con el aumento porcentual correspondiente. A continuación propondremos un ejemplo sencillo que represente un enunciado típico de problema sobre disminuciones porcentuales. Prestaremos especial atención a identificar la cantidad inicial, cantidad final y la disminución porcentual. Mediante el proceso de sacar factor común, explicaremos el concepto de índice de variación poniendo especial énfasis en las operaciones con fracciones así como con números decimales. Por último relacionaremos el índice de variación con la disminución porcentual correspondiente. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas

7 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 15: VARIACIONES PORCENTUALES ENCADENADAS

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad proponiendo un ejemplo donde una cierta cantidad sufra aumentos y disminuciones porcentuales consecutivas. Explicaremos paso por paso su metodología de resolución centrando la atención del estudiante en la importancia de hallar, bien si se trata de incremento o de disminución porcentual, su correspondiente índice de variación. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 7 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 16: INTERÉS SIMPLE

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Al principio de esta actividad definiremos y explicaremos mediante ejemplos sencillos los conceptos de capital, rédito, tiempo e interés para posteriormente introducir el concepto de interés simple o beneficio de una inversión financiera. Prestaremos especial atención en poner un ejemplo donde se identifique el capital inicial y el rédito expresado en % anual. Después explicaremos el fundamento de la técnica para calcular el interés simple mencionando claramente que cada año retiramos los intereses. Después explicaremos sobre el mismo ejemplo que si los intereses son retirados cada mes, no deberá olvidarse dividir el rédito anual entre 12 meses. A continuación haremos lo mismo en el caso que los intereses sean retirados diariamente o trimestralmente, etc. Después repartiremos la ficha resumen 7 y la hoja de ejercicios y problemas 8 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 17: INTERÉS COMPUESTO

Duración: 20 minutos. **Desarrollo:** Para finalizar esta sesión, explicaremos el concepto de interés compuesto mediante un ejemplo claro y sencillo. Se debe explicar claramente su definición atendiendo a los conceptos de capital inicial, rédito y capital final así como el tiempo que el capital permanece ingresado. A continuación explicaremos el concepto de período de capitalización centrándonos en que los estudiantes entiendan que el rédito ha de expresarse en función de dicho período de capitalización. Para ello modificaremos el ejemplo propuesto empleando periodos de capitalización anual, trimestral y mensual. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 8 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

4.9.5. SESIÓN 5: LA PROPORCIONALIDAD EN LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS. APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA MEDIDA Y ESTIMACIÓN. CONCEPTO DE ESCALA

ACTIVIDAD 18: TABLA DE FRECUENCIAS

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta sesión recordando a los estudiantes los pasos a seguir en la elaboración de una tabla de frecuencias. Haremos un tanteo previo de los conocimientos repasando sobre todo los conceptos de frecuencia absoluta, frecuencia acumulada y la tipología de los datos estadísticos mediante un ejemplo claro y sencillo. Después repartiremos la ficha resumen 8 y la hoja de ejercicios y problemas 9 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 19: DIAGRAMA DE BARRAS

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad explicando a los estudiantes para qué tipo de datos se suelen utilizar los diagramas de barras. Nos centraremos en su representación sobre los ejes de coordenadas explicando dónde y cómo se colocan los valores de las variables y de las frecuencias. Prestaremos especial atención a que entiendan que la altura de cada barra ha de ser directamente proporcional a la frecuencia de cada dato. Remarcaremos la importancia de controlar el tamaño de la altura del diagrama asignando una altura previamente definida al dato con mayor frecuencia absoluta. A continuación explicaremos cómo representar éstas alturas por medio de una tabla. Nos detendremos en el cálculo de la constante de proporcionalidad para hallar el resto de alturas. Por último, mediante un ejemplo, dibujaremos o proyectaremos en la pizarra un diagrama de barras con las alturas adecuadas. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 9 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 20: HISTOGRAMA Y POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Se comenzará esta actividad definiendo el concepto de histograma. A continuación repasaremos los conceptos de intervalo y amplitud de una variable estadística. Posteriormente representaremos la tabla de frecuencias absolutas y alturas procediendo de igual modo que en la actividad anterior. A continuación explicaremos el proceso de representación de un histograma mediante un ejemplo claro y sencillo dibujado o proyectado en la pizarra prestando especial atención a: ejes cartesianos, amplitud de la variable, punto medio o marca de clase y rectángulos de altura proporcional a la frecuencia de cada intervalo. Por último explicaremos cómo construir el polígono de frecuencias mediante las marcas de clase. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 9 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 21: DIAGRAMA DE SECTORES

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad explicando en qué consiste un diagrama de sectores. Mediante un ejemplo sencillo elaboraremos una tabla de datos estadísticos y frecuencias absolutas, explicando a los estudiantes cómo calcular el ángulo de cada sector de forma directamente proporcional a cada frecuencia y por medio de la constante de proporcionalidad directa. Por último, proyectaremos o dibujaremos paso a paso el diagrama de sectores correspondiente al ejemplo indicado. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 9 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 22: PICTOGRAMAS

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad definiendo el concepto de pictograma en estadística. A continuación mostraremos a los estudiantes algunos ejemplos habituales de pictogramas destacando cómo el área o la altura de cada objeto es proporcional a cada frecuencia absoluta. Después nos centraremos en el caso de pictogramas estadísticos en los que únicamente se modifica la altura del objeto y procederemos a mostrar un ejemplo gráfico en la pizarra. A continuación explicaremos el caso de pictogramas estadísticos en los que el objeto modifica el área de forma directamente proporcional a la frecuencia absoluta de cada variable. De este modo elaboraremos un ejemplo mediante una tabla y prestaremos especial atención a identificar el área de cada objeto así como el lado del cuadrado correspondiente. Para ello insistiremos en el cálculo de la constante de proporcionalidad y tantearemos a los estudiantes sobre su conocimiento del cálculo del lado de un cuadrado a partir de su área. Por último pasaremos a representar el ejemplo gráficamente en la pizarra o mediante proyector. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 9 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 23: ESTIMACIÓN Y PROPORCIONALIDAD

Duración: 15 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad remarcando la importancia de la proporcionalidad para la estimación de medidas como longitudes y áreas a partir de cierta documentación gráfica como imágenes, fotografías o dibujos. A continuación propondremos un ejemplo gráfico en la pizarra o proyectado en el que se haga una estimación de la altura de un objeto mediante una relación de proporcionalidad entre las alturas de éste y otro objeto. Insistiremos a los estudiantes en que deben dominar y entender perfectamente el concepto de constante de proporcionalidad directa. A continuación propondremos otro ejemplo en el que se busque estimar el área de ciertos objetos dados. Distinguiremos los casos en que se trate de objetos circulares y de objetos cuadrados, pero siempre tratándose de figuras geométricas sencillas. En este caso nos detendremos en mostrar qué es lo que ocurre con la constante de proporcionalidad directa cuando se relacionan áreas directamente proporcionales. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 9 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 24: CONCEPTO DE ESCALA

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad introduciendo el concepto de escala como relación de proporcionalidad o semejanza. Posteriormente mostraremos la expresión numérica de la escala prestando especial atención a la medida en el mapa o dibujo y la medida real. Insistiremos en la interpretación de distancias y su relación con la constante de proporcionalidad directa. A continuación representaremos mediante un ejemplo visual la representación gráfica de la escala atendiendo a la unidad de medida en la realidad y la unidad de medida en el dibujo o mapa y volveremos a relacionar estas medidas con la constante de proporcionalidad directa. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 10 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 25: ESTIMACIÓN DEL TAMAÑO DE UNA POBLACIÓN POR MUESTREO MEDIANTE LA PROPORCIONALIDAD

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Para finalizar esta sesión propondremos un ejemplo en el que tengamos una cierta cantidad de objetos similares distribuidos de forma más o menos homogénea y queramos calcular su número sin tener que contarlos todos. Después dibujaremos o proyectaremos un ejemplo gráfico de esta situación así como su metodología de resolución. Por último explicaremos cómo estimar el número total de objetos mediante el cálculo de la constante de proporcionalidad directa. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 10 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

4.9.6. SESIÓN 6: APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA GEOMETRÍA. ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS PROPORCIONALES

ACTIVIDAD 26: EL TEOREMA DE TALES

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos la sesión introduciendo el Teorema de Tales. Para ello nos valdremos de un dibujo en la pizarra destacando aquellos segmentos que cumplen la proporcionalidad directa. A continuación pasaremos a explicar el Teorema de Tales en los triángulos relacionándolo inmediatamente con la semejanza de los mismos así como con las reglas de proporcionalidad directa que se verifican. Después repartiremos la ficha resumen 10 y la hoja de ejercicios y problemas 11 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 27: POTENCIA DE UN PUNTO

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad con la ayuda de la pizarra o de GeoGebra definiendo el concepto de potencia de un punto exterior respecto de una circunferencia relacionándolo inmediatamente con un caso de proporcionalidad inversa. Definiremos la constante de proporcionalidad inversa que representa dicha potencia. Después analizaremos el caso en el que el punto es interior a dicha circunferencia. Haremos lo mismo en el caso de que la potencia tenga un punto de tangencia. A continuación nos centraremos en identificar aquellos triángulos semejantes que aparecen en cada caso visto anteriormente, relacionando sus lados y sus ángulos. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 11 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 28: EL TEOREMA DE LA ALTURA Y EL TEOREMA DEL CATETO

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad enunciando el Teorema de la altura y su vinculación con las propiedades geométricas del triángulo rectángulo. Destacaremos sobre todo los triángulos semejantes que intervienen así como la proporcionalidad directa entre sus lados homólogos. A continuación enunciaremos el Teorema del cateto insistiendo en la proporcionalidad directa que se cumple entre los diferentes segmentos que intervienen. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 11 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 29: POLÍGONOS SEMEJANTES

Duración: 20 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad explicando cuándo dos polígonos son semejantes. Mediante un ejemplo visual insistiremos en la condición de semejanza de triángulos en relación a los polígonos. Repasaremos el concepto de lados homólogos proporcionales e igualdad de ángulos. Posteriormente definiremos la razón de semejanza de ambos polígonos y la vincularemos con la constante de proporcionalidad entre lados homólogos. Después repartiremos la ficha resumen 11 y la hoja de ejercicios y problemas 12 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 30: ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS PROPORCIONALES

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad mostrando un ejemplo sencillo de figuras proporcionales: cubos semejantes. A continuación y mediante la ayuda de una tabla, explicaremos la razón de proporcionalidad existente entre las respectivas aristas, áreas y volúmenes. Por último expresaremos estas relaciones de proporcionalidad de manera general extrapolándolas a los casos de las aristas, áreas y volúmenes de cualquier poliedro o figura volumétrica. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 12 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

4.9.7. SESIÓN 7: LA PROPORCIÓN ÁUREA

ACTIVIDAD 31: RAZÓN ÁUREA Y SEGMENTO ÁUREO

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta sesión explicando la razón áurea como un caso particular de proporcionalidad, para lo cual usaremos la representación gráfica de un segmento que dividiremos de forma que se pueda deducir numéricamente el valor del número áureo. Recordaremos a los estudiantes el concepto de número irracional a propósito de ϕ. A continuación daremos unas breves nociones sobre la historia y descubrimiento de este número. Después explicaremos paso a paso gráficamente o con ayuda de GeoGebra, la construcción de la sección áurea de un segmento así como el segmento áureo incidiendo en las razones de proporcionalidad que conducen al valor de ϕ. Después repartiremos la ficha resumen 12 y la hoja de ejercicios y problemas 13 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 32: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL PENTÁGONO REGULAR

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad describiendo brevemente la figura del pentágono regular. Mediante una representación gráfica o con la ayuda del GeoGebra, presentaremos el número áureo como la relación entre la diagonal y el lado del pentágono para después explicar su presencia dada en más relaciones. Explicaremos así mismo la figura del pentáculo o pentagrama pitagórico en el que mostraremos más ejemplos de relaciones áureas existentes. Posteriormente enseñaremos el triángulo sublime o triangulo áureo mayor mostrando las propiedades entre sus lados y sus ángulos así como su presencia en el pentágono. De este modo haremos lo mismo con el triángulo divino o triangulo áureo menor. Después explicaremos el área del pentágono mediante la descomposición de éste en triángulos áureos y de cómo sus superficies siempre guardan la proporción áurea. Para acabar esta actividad, hablaremos de otras relaciones áureas, triángulos y segmentos especiales que también se dan en esta figura. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 13 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 33: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL DECÁGONO, EN OTRAS FIGURAS Y EN POLIEDROS REGULARES

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad describiendo brevemente las características del decágono regular. Con la ayuda de un dibujo o bien de GeoGebra mostraremos la presencia del triángulo áureo mayor en el decágono y recordaremos sus propiedades. Acto seguido mencionaremos el hexágono regular el cual describiremos brevemente y mencionaremos la relación áurea que existe entre su lado y el lado de un decágono inscrito en la misma circunferencia que éste. A continuación explicaremos la relación especial entre las apotemas del hexágono y de un pentágono con lados iguales a éste. Por último simplemente mencionaremos (sin entrar en detalles) la presencia del número áureo en los distintos poliedros regulares sobre todo en el dodecaedro y el icosaedro. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 13 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 34: EL RECTÁNGULO ÁUREO Y LA ESPIRAL ÁUREA

Duración: 15 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad introduciendo a los estudiantes el concepto de rectángulo áureo. Con ayuda de una representación gráfica en la pizarra o bien mediante GeoGebra representaremos un rectángulo áureo explicando paso a paso su construcción geométrica. Posteriormente haremos lo mismo con el rectángulo recíproco. Por ultimo mencionaremos las principales descomposiciones armónicas que se pueden hacer a partir de ambos rectángulos mencionando que se usarán posteriormente en las obras pictóricas que estudiaremos más adelante. Al final de esta actividad explicaremos paso a paso cómo obtener una espiral áurea a partir del crecimiento de sucesivos rectángulos áureos, remarcando el hecho de que no se trata exactamente una espiral sino de la concatenación de cuartos de arcos de circunferencia cuyo radio va variando sucesivamente aunque se le suela denominar espiral áurea. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 13 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 35: LA SUCESIÓN DE FIBONACCI Y EL NÚMERO ÁUREO

Duración: 15 minutos. **Desarrollo:** Finalizaremos esta sesión explicando en qué consiste la sucesión de Fibonacci, mencionando brevemente su historia así como su presencia en otras disciplinas y ramas del conocimiento. A continuación mostraremos la generalización de esta serie para después enseñar que, conforme vamos avanzando en sus términos, la razón entre cada término y el anterior va aproximándose al número áureo. Mediante un ejemplo gráfico, bien en la pizarra, bien mediante GeoGebra, mostraremos la construcción sucesiva de rectángulos dibujando o representando cuadrados según la serie de Fibonacci para volver a demostrar que cada vez que aumenta dicho rectángulo sus proporciones tienden más al número áureo. A continuación explicaremos cómo generar la espiral de Fibonacci a partir de estos cuadrados, pero remarcando el hecho de que no es exactamente una espiral sino la concatenación de cuartos de arcos de circunferencia cuyo radio va variando sucesivamente aunque se le suela denominar espiral de Fibonacci. Por último mencionaremos la presencia del número áureo en otras muchas disciplinas a parte de las Matemáticas. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 13 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

4.9.8. SESIÓN 8: LA PROPORCIONALIDAD EN LOS OBJETOS Y DISEÑOS DE LA VIDA COTIDIANA. LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA NATURALEZA

ACTIVIDAD 36: LA PROPORCIONALIDAD EN LAS HOJAS DE PAPEL

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta sesión planteando a los estudiantes una serie de cuestiones sobre el por qué de las medidas de las hojas de papel o la justificación de su nomenclatura y/o numeración. Después haremos una breve mención a la norma DIN y su formato de referencia. Posteriormente explicaremos las características de la proporción $\sqrt{2}$ mediante la ayuda de un dibujo o esquema en la pizarra. Así mismo también realizaremos de manera algebraica la demostración de esta proporción especial. Después mencionaremos a los estudiantes que también existen otros formatos de papel normalizados aunque estén en desuso. A continuación repartiremos la ficha resumen 13 y la hoja de ejercicios y problemas 14 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 37: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LOS OBJETOS Y DISEÑOS DE LA VIDA COTIDIANA

Duración: 15 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad mostrando los ejemplos más cercanos y curiosos en los que se puede encontrar lo proporción áurea como por ejemplo las tarjetas de crédito o el DNI. Posteriormente enseñaremos ejemplos algo más elaborados y complejos en los que se encuentra también esta proporción: diseños de logotipos, mobiliario, coches, etc. Así mismo, justificaremos a los estudiantes el por qué se usa esta proporción y no otra en la creación de éstos objetos. A continuación proyectaremos el vídeo "*Más por Menos – El número áureo*". Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 14 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 38: ARMONÍAS HUMANAS

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad introduciendo a los estudiantes el personaje de Vitruvio para posteriormente comentar la obra del artista del Renacimiento Leonardo da Vinci "El hombre de Vitruvio" mediante una proyección o imagen. Hablaremos de las partes que componen el cuerpo así como las proporciones comprendidas en el rango de la sección áurea indicando que Leonardo fue un gran estudioso de las proporciones armoniosas. Así mismo explicaremos a los estudiantes que otros autores y artistas también han buscado y representado relaciones áureas en todo el cuerpo humano. Introduciremos al investigador Sir Theodore Cook (s XIX) y pintores como Botticelli. A continuación mencionaremos el Modulor de Le Corbusier contando que se convirtió en un sistema de medidas para la construcción de edificios. Por otro lado enseñaremos la etimología de la palabra “Modulor”. Después resaltaremos la importancia que Le Corbusier otorgaba a la sección áurea y mencionaremos las múltiples obras de investigación que se escribieron sobre dicha proporción a principios del s XX. A continuación hablaremos de la antropometría áurea poniendo un ejemplo real de cómo los estudios antropométricos revelan la existencia de la sección áurea entre las distintas partes del cuerpo humano así como en el rostro. Después repartiremos la ficha resumen 14 y la hoja de ejercicios y problemas 15 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

ACTIVIDAD 39: EL NÚMERO ÁUREO EN LA NATURALEZA

Duración: 20 minutos. **Desarrollo:** Finalizaremos esta sesión introduciendo el origen del descubrimiento de la sucesión de Fibonacci planteando el problema de la reproducción de conejos. Después mencionaremos la presencia de esta sucesión en la biología de las plantas: distribución de las hojas y crecimiento de tallos. Hablaremos de cómo se ajusta esta espiral a parejas consecutivas de términos de esta sucesión. A continuación enseñaremos ejemplos de la espiral de Fibonacci en otros crecimientos vegetales y animales como flores y frutos o las conchas de animales marinos. Posteriormente hablaremos de la proporción áurea en otras formas de la naturaleza. Como ejemplo pondremos una de las moléculas más estables del carbono denominada fullereno. Después mostraremos las relaciones áureas que se dan en el huevo de gallina y en algunas galaxias en concreto las galaxias espirales. Después continuaremos con la hoja de ejercicios y problemas 15 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

4.9.9. SESIÓN 9: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA MÚSICA Y EN EL ARTE: PINTURA Y ESCULTURA

ACTIVIDAD 40: LA ARMONÍA PITAGÓRICA EN LA MÚSICA. LAS RELACIONES ENTRE EL NÚMERO ÁUREO Y LAS PROPORCIONES MUSICALES

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta sesión introduciendo a los estudiantes la unión de las Matemáticas y la música por medio de la armonía pitagórica. Después explicaremos los descubrimientos de Pitágoras entorno a las vibraciones de las diferentes fracciones de la cuerda así como de sus relaciones de números enteros para finalizar en el aspecto matemático de la armonía. Para ello representaremos en una tabla las denominaciones que recibían las distintas fracciones de la cuerda: unísono, diapasón, diapente y diatéseron así como su denominación actual: nota base, octava, quinta y cuarta. Luego mencionaremos las ideas de Platón sobre la organización de la materia y el mundo. A continuación explicaremos las relaciones entre el número áureo y las proporciones musicales. Explicaremos sobre la base de un esquema geométrico la proporción correspondiente al diapasón y su vinculación con el rectángulo áureo recíproco, del diapente y su relación con el triángulo áureo mayor y del diatéseron y su relación con el triángulo pitagórico. En este último caso nos detendremos en explicar con más detalle en qué consiste un triángulo pitagórico y su homólogo presente en el pentágono regular.

ACTIVIDAD 41: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LOS INSTRUMENTOS

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad poniendo como ejemplo el piano. Explicaremos brevemente su configuración y morfología para posteriormente mostrar a los estudiantes dónde se encuentran sus proporciones armoniosas y áureas. Mencionaremos a continuación la presencia de la serie de Fibonacci en la distribución de sus teclas así como la posibilidad de reconocer las armonías musicales fundamentales antes estudiadas. Después relacionaremos estas proporciones musicales con muchas de las obras pictóricas y arquitectónicas que se estudiarán más adelante en esta UD. También pondremos el ejemplo de algunos instrumentos de cuerda como el violín o la guitarra y por medio de un esquema sencillo, mostraremos la presencia del número áureo en el diseño y forma de estos instrumentos de cuerda. Por último enseñaremos una curiosidad musical sobre el número áureo, en concreto el sonido del número Phi mediante la proyección del vídeo *“What Phi (the golden ratio) Sounds Like”*. Al finalizar esta actividad entregaremos a los estudiantes la ficha resumen 15.

ACTIVIDAD 42: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE EGIPCIO

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad poniendo un ejemplo de la escultura del arte egipcio: “Estela del faraón Vadyi” en la que explicaremos mediante la ayuda de una proyección o imagen la relación áurea con respecto a cada una de sus partes.

ACTIVIDAD 43: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE CLÁSICO GRIEGO

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad introduciendo a los estudiantes y breve referencia histórica sobre la belleza mediante la armonía de las proporciones mencionando a Policleto y su célebre tratado sobre las proporciones del cuerpo humano. A continuación proyectaremos un ejemplo: el “Doríforo” en el que remarcaremos los segmentos áureos así como su unidad de medida proporcional.

ACTIVIDAD 44: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE GÓTICO

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad proyectando un ejemplo de pintura gótica: "El astrónomo y el calculista" donde destacaremos el empleo sistemático de las trazas geométricas basadas en polígonos regulares y esquemas simples de la proporción áurea.

ACTIVIDAD 45: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE RENACENTISTA

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad hablando de la pintura italiana del Quattrocento mediante un ejemplo: "El nacimiento de Venus" de Botticelli. Mostraremos a los estudiantes las distintas relaciones áureas presentes tanto en la forma del cuadro como en la figura humana de la Venus. Destacaremos así mismo que estas relaciones pueden darse en potencias del número áureo. A continuación pasaremos a la pintura italiana del Cinquecento en el que incidiremos en la relación de la música con las demás artes mencionando a Leonardo da Vinci. Como ejemplo mostraremos "La última cena" de este autor en la que destacaremos la disposición del rectángulo recíproco y sus trazados áureos principales. Continuaremos con otro ejemplo de Leonardo, "La Gioconda" en el que destacaremos las múltiples relaciones áureas tanto en las dimensiones del cuadro como en la configuración del rostro vinculándolo incluso con la espiral de Fibonacci. Después explicaremos la escultura italiana del Cinquecento mostrando el ejemplo de "El David" de Miguel Ángel, en la que analizaremos aquellos aspectos de la misma que se ajustan claramente a la proporción áurea. Finalizaremos esta actividad hablando de la pintura italiana manierista mediante el ejemplo de "Venus y el organista" de Tiziano. En ella mostraremos a los estudiantes la presencia de ciertas relaciones musicales así como de la proporción áurea en la totalidad de la estructura del cuadro.

ACTIVIDAD 46: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE BARROCO

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad hablando de la pintura barroca holandesa, mediante un ejemplo: "El taller del pintor" de Vermeer. Captaremos la atención de los estudiantes hacia la importancia de la proporción áurea que rige toda la obra. Así mismo representaremos las principales líneas ortogonales y oblicuas que marcan el entramado áureo de la misma. A continuación pasaremos a explicar la pintura barroca española, mediante un ejemplo significativo: "Las Meninas" de Velázquez. Destacaremos sobre todo el sentido espacial de este pintor así como los trazos maestros que se esconden tras la proporción áurea de este cuadro e incluso la espiral de Fibonacci.

ACTIVIDAD 47: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE DEL S XVII (ROCOCÓ)

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad hablando de la pintura rococó, mediante un ejemplo: "El Pajarero" de Greuze destacando la utilización de la medida áurea así como la importancia de las longitudes de la figura en la configuración de los segmentos áureos que definen el cuadro.

ACTIVIDAD 48: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE DEL S XIX

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad mencionando los movimientos del clasicismo y romanticismo así como sus principales características. A continuación hablaremos del clasicismo, mediante un ejemplo: “La muerte de Marat” de Jaques-Luis David destacando su descomposición en medidas áureas mediante el cálculo de puntos Phi que dividen la altura del cuadro. Posteriormente hablaremos de los movimientos impresionistas mediante el ejemplo: “El castillo negro” de Paul Cézanne, mostrando a los estudiantes las principales líneas ortogonales y horizontales que estructuran el cuadro coincidiendo con los puntos de sección áurea.

ACTIVIDAD 49: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE DEL S XX

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Finalizaremos esta sesión introduciendo a los estudiantes la pintura del cubismo. Posteriormente hablaremos de la abstracción geométrica como consecuencia del cubismo y de otros movimientos menores como el orfismo o el neoplasticismo destacando la importancia que se otorgaba a las armonías conceptuales. Mostraremos el ejemplo: “Pintura I” de Mondrian destacando sobre todo la descomposición áurea de las figuras geométricas para formar la composición del cuadro. Después hablaremos del constructivismo ruso mediante otro ejemplo: “Suprematismo 418” de Kasimir Malevitch destacando las colocaciones áureas de las figuras. Para finalizar esta sesión repartiremos la ficha resumen 16 y la hoja de ejercicios y problemas 16 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente.

4.9.10. SESIÓN 10: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA

ACTIVIDAD 50: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA MEGALÍTICA

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta sesión hablando de la arquitectura megalítica, mediante un ejemplo: Stonehenge, destacando la presencia del rectángulo áureo recíproco en su distribución. También haremos un sencillo análisis geométrico tanto de su planta como de los arcos paganos mostrando su relación con las proporciones del triángulo pitagórico.

ACTIVIDAD 51: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA EGIPCIA

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos la actividad hablando de la arquitectura egipcia mediante un ejemplo característico: la Pirámide de Keops. En ella destacaremos la relación áurea existente entre sus dimensiones principales. Narraremos la historia de Heródoto en relación al número áureo y su presencia en la pirámide.

ACTIVIDAD 52: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA CLÁSICA: GRECIA Y ROMA

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad explicando el fundamento de los principios arquitectónicos romanos derivados de los griegos mediante el personaje de Vitruvio. Hablaremos de la armonía simétrica y de las distintas proporciones del cuerpo humano y su vinculación al módulo-modelo referente en el diseño de templos. Explicaremos a continuación el criterio de diseño de templos griegos así como de las relaciones de proporcionalidad de las distintas partes de los templos según describió Vitruvio. Después presentaremos un ejemplo característico de la arquitectura griega: el Partenón, donde mostraremos sus relaciones geométricas fundamentales con el rectángulo recíproco así como las correspondientes a las armonías musicales, al triángulo pitagórico y al número áureo tanto en planta como en el alzado principal. A continuación mostraremos un ejemplo de arquitectura romana: el Arco de Constantino en el que destacaremos la presencia del rectángulo áureo en la forma global de su configuración. Por último presentaremos a los estudiantes el ejemplo del Coliseo romano resaltando su encuadre mediante rectángulos áureos así como la configuración de la arena central.

ACTIVIDAD 53: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA GÓTICA

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad hablando de la arquitectura gótica. Para ello enseñaremos a los estudiantes ejemplos de trazados en planta góticos típicos según el investigador Moessel. A continuación pondremos un ejemplo: la Catedral de Chartres destacando las distintas relaciones de proporcionalidad que se verifican entre los distintos elementos de su fachada principal. Por último hablaremos de la arquitectura gótica española poniendo los ejemplos de: la Catedral de Burgos, Toledo y León, destacando la configuración de sus diseños en planta basados en las propiedades geométricas del pentágono y en el número áureo.

ACTIVIDAD 54: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA RENACENTISTA

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad hablando de la arquitectura italiana del Quattrocento. Explicaremos a los estudiantes la importancia de los cánones clásicos de renacimiento. Así mismo hablaremos de la figura de León Bautista Alberti y sus afirmaciones sobre las proporciones armoniosas de los trazados arquitectónicos mencionando su tratado de arquitectura “De re aedificatoria” donde destacaremos las proporciones de superficies arquitectónicas más usadas en función de las relaciones armónicas musicales. A continuación, pondremos un ejemplo: la Iglesia de Santa María Novella de Alberti, mostrando en su fachada la armonía de las proporciones musicales en función a su vez de proporciones más sencillas basadas en el número áureo. Después hablaremos de la arquitectura renacentista española mediante un ejemplo: la fachada principal de la Universidad de Alcalá de Henares de Rodrigo Gil, en el que señalaremos a los estudiantes la importancia de los huecos así como los encuadres de proporciones áureas.

ACTIVIDAD 55: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA ROCOCÓ

Duración: 5 minutos. **Desarrollo:** Comenzaremos esta actividad mostrando un ejemplo: el Edificio de la Marina en París de Ange-Jacques Gabriel, destacando los cánones áureos en su diseño y configuración de los distintos alzados principales.

ACTIVIDAD 55: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA DE LOS SS XIX Y XX

Duración: 10 minutos. **Desarrollo:** Para finalizar esta sesión y esta UD hablaremos de un monumento arquitectónico del constructivismo ruso: el Monumento a la Tercera Internacional de Vladimir Tatlin donde destacaremos su forma de espiral muy cercana a la espiral áurea. Posteriormente comentaremos el movimiento modernista y la figura del arquitecto y diseñador Gaudí mediante el ejemplo de su obra maestra: la Sagrada Familia de la que destacaremos su relación existente entre figuras que recuerdan a la naturaleza y a la proporción áurea mencionando sobre todo la presencia de espirales de Fibonacci. A continuación hablaremos de la figura del arquitecto Le Corbusier mencionando su propuesta innovadora sobre medidas y proporciones llamada Modulor cuyo fundamento era la sección áurea. Después mostraremos el ejemplo de la Villa Saboya destacando la inconfundible presencia de la proporción áurea en su moderno diseño. Para finalizar esta sesión repartiremos la ficha resumen 17 y la hoja de ejercicios y problemas 17 para resolver en clase algunos problemas y el resto dejarlos como tarea para casa y para corregir en la pizarra en los primeros minutos de la sesión siguiente. Si disponemos de algo más de tiempo, podemos proyectar los últimos 15 minutos del vídeo *HORIZONTES MATEMÁTICA - Capítulo 2 – PROPORCIONALIDAD.*

4.9.11. SESIÓN 11: EVALUACIÓN

ACTIVIDAD 56: EVALUACIÓN FINAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Duración: 55 minutos. **Desarrollo:** La prueba consistirá en la elaboración de un examen escrito configurado con al menos una de las preguntas presentes en cada prueba de evaluación, las cuales se pueden consultar en el ANEXO V al final de este TFM.

4.10. CÓMO ANALIZAR LOS RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN

Evaluación general del desarrollo de la UD

Al finalizar esta UD se recomienda analizar los siguientes aspectos:

- La evolución de la motivación de los estudiantes desde el primer día.
- La asistencia en general.
- El nivel de atención durante las explicaciones y durante la realización de ejercicios en clase.
- El nivel de participación cuando se realicen correcciones de ejercicios en la pizarra por parte de los propios estudiantes así como el nivel de participación cuando el profesor pregunte abiertamente a la clase.
- El porcentaje de estudiantes que presentan un cuaderno limpio, ordenado y bien estructurado, o aquellos que por el contrario tienen un cuaderno escrito con mala letra, desordenado y/o desestructurado.
- Con el mismo criterio anterior se puede uno referir al examen de evaluación modelo PISA que se realice al final de esta UD.

Resultados obtenidos por los estudiantes

Los resultados obtenidos por los estudiantes tanto en la prueba de evaluación final como en el cuaderno de trabajo personal se harán conforme a los criterios e instrumentos de evaluación explicados en el Apartado 4.8.

4.11. CÓMO AFRONTAR LAS POSIBLES DIFICULTADES Y PROBLEMAS DE APRENDIZAJE

A continuación se comentan brevemente en primer lugar las dificultades que pueden surgir a la hora de desarrollar y explicar esta UD. En segundo lugar se exponen los problemas de aprendizaje más importantes que podrían detectarse en el transcurso de la misma.

Dificultades

Las principales dificultades que se podrían encontrar en los estudiantes al llevar esta UD al entorno del aula pueden ser las siguientes:

- **Falta de motivación, apatía, falta de ganas y falta de trabajo.** Ante este problema se recomienda tratar siempre de justificar los contenidos de esta UD haciéndolos entendibles e interesantes. Se propone aumentar la inquietud de los estudiantes realizando preguntas y explicando el fundamento de todos los conceptos tratados. Así como suscitar su interés mostrándoles las ventajas de dominar los conceptos inherentes a la proporcionalidad mediante multitud de ejercicios y ejemplos que se presenten como útiles, reales y desafiantes.
- **Ausencia de concentración, así como falta de silencio y de disciplina.** Ante este problema se recomienda crear un ambiente adecuado en clase para fomentar el trabajo ordenado y responsable a la vez que la concentración. Un ámbito de trabajo donde impere el silencio, el respeto mutuo y la disciplina. De este modo, por ejemplo, es aconsejable parar en rotundo cualquier actividad o explicación si no se consigue este ambiente en el aula.
- **Desinterés, desorden y actitud negativa.** A través de todas las clases se debería tratar de aumentar el interés por la asignatura de Matemáticas y en concreto por la proporcionalidad mediante explicaciones de las muchas utilidades y aplicaciones que ésta tiene en innumerables ramas de otras disciplinas y conocimientos.

Problemas de aprendizaje

Los principales problemas de aprendizaje que podrían encontrarse en los estudiantes en relación a esta UD pueden ser los siguientes:

- **Dificultad para realizar de forma ágil cálculos mentales con números enteros, fracciones, porcentajes y decimales sencillos.** Ante esta dificultad se recomienda tratar todos los días de ejercitar el cálculo mental mediante ejercicios rápidos y dinámicos.
- **Falta absoluta de conocimiento de conceptos matemáticos fundamentales.** Se recomienda insistir mucho en los conocimientos previos que han de tener los estudiantes para avanzar en general en el conocimiento matemático. Los fundamentos de base deben recordarse una y otra vez aprovechando la resolución de ciertos ejemplos o ejercicios prácticos.
- **No saber realizar operaciones sencillas algebraicas de simplificación y cancelación.** Mediante los ejercicios en clase debe procurarse que los estudiantes practiquen al máximo este tipo de operaciones, no sin antes recordarles que por su cuenta también lo deben practicar y estudiar.
- **No saber plantear ni resolver problemas sencillos relacionados con la proporcionalidad.** Ante este problema se recomienda explicar lentamente

deteniéndose en los conceptos clave y en los pasos a seguir en el planteamiento y resolución de problemas. No sin antes incidir en los conocimientos fundamentales matemáticos que ya deberían haber adquirido de cursos anteriores.

- **No entender conceptos básicos relacionados con la proporcionalidad.** Para ello es recomendable que el docente vuelva a incidir en los conocimientos fundamentales matemáticos de cursos anteriores y en la repetición exhaustiva de ejercicios y problemas en los que éstos aparezcan.
- **Completo desconocimiento de los fundamentos y pasos a seguir para realizar determinados cálculos matemáticos.** Ante el hecho innegable de que puede haber estudiantes que vengan arrastrando una “incultura matemática” francamente alarmante debido a su falta de estudio y trabajo en cursos anteriores, se recomienda explicar y/o recordar brevemente de nuevo dichos fundamentos y pasos prestando especial atención a realizar ejemplos adecuados y sencillos recurriendo al paso por paso mediante una metodología clara y estructurada.

5. CONCLUSIONES

Como conclusiones de este Trabajo Fin de Máster, podemos destacar lo siguiente:

1. Dada la extensión y la incontable cantidad de documentación así como de fuentes halladas sobre el tema de la proporcionalidad, resulta evidente que la enseñanza de la ésta brinda al docente una oportunidad única para poder relacionar entre sí muchos campos dentro de la propia Matemática como son la aritmética, álgebra, funciones y gráficas, geometría o estadística así como su relación y vinculación en mayor o menor medida, con otros campos disciplinares como la economía, naturaleza, ciencias, música, pintura, escultura, arquitectura y objetos y diseños de la vida cotidiana.
2. Por otro lado, y según establece la *ORDEN 330-01/2007, de 20 de junio, del Consejero de Educación, por la que se reglan para la Comunidad de Madrid la implantación y la organización de la Educación Secundaria Obligatoria derivada de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, en relación al horario semanal de Matemáticas de 3º de la ESO*, podemos afirmar que resulta extremadamente complicado, disponiendo de tan sólo 3 horas semanales, llevar a cabo la totalidad de las sesiones programadas en esta UD, a no ser que la Consejería de Educación de la CAM modificara dicha ORDEN ampliando el número de horas semanales disponibles para las Matemáticas de 3º de la ESO, tal y como puede comprobarse en la siguiente tabla:

HORARIO SEMANAL
DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

Cursos 1.º, 2.º y 3.º

Materias	Períodos lectivos semanales		
	1º	2º	3º
Biología y geología			2
Ciencias de la naturaleza	3	3	
Ciencias sociales, geografía e historia	3	4	3
Educación física	2	2	2
Educación para la ciudadanía y los derechos humanos		1	
Educación plástica y visual	3		2
Física y química			2
Lengua castellana y literatura	5	5	4
Lengua extranjera	3	3	3
Matemáticas	4	4	3
Música		3	2

3. No obstante se recomienda que el docente encargado de impartir esta UD mantenga un contacto directo con el profesor del Departamento de Matemáticas encargado de impartir la asignatura de Ampliación o Refuerzo de Matemáticas con la finalidad de ampliar con más dedicación los conocimientos básicos principales que se han mostrado a lo largo del desarrollo de la misma.
4. Por otro lado, habiendo analizando las competencias y objetivos a alcanzar mediante la enseñanza de la proporcionalidad, sabemos que ésta se encuentra presente de una manera bien directa o bien implícita dentro de la mayoría de los contenidos no sólo de Matemáticas, sino también de otras disciplinas impartidas en la ESO. De este modo, teniendo en cuenta que en el Tercer Curso de la ESO la especialización hacia el bachillerato científico tecnológico o ciencias sociales es inminente, siendo el curso que más tiene presente el estudio y el trabajo de la proporcionalidad en todos los aspectos y de una manera más amplia y práctica, se recomienda encarecidamente que el profesor de Matemáticas encargado de impartir esta UD proponga una estrecha coordinación docente con el resto de profesores de los departamentos de CIENCIAS SOCIALES, GEOGRAFÍA E HISTORIA, MÚSICA, BIOLOGÍA Y GEOLOGÍA, FÍSICA Y QUÍMICA y EDUCACIÓN PLÁSTICA Y VISUAL encargados de impartir estas disciplinas en 3º de la ESO de tal manera que procuren identificar cuándo y en cuáles de sus contenidos aparece de forma explícita o implícita el tema de la proporcionalidad con el objetivo de que lo enseñen a los estudiantes haciendo mención o relacionando cada disciplina a su vez con la propia Matemática.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

LEGISLACIÓN Y NORMATIVA

- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, *por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Ministerio de Educación y Ciencia «BOE» núm. 5, de 5 de enero de 2007*.
- Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, *por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria*. BOCM Núm. 126 de 29 de mayo de 2007.
- ORDEN 330-01/2007, de 20 de junio, del Consejero de Educación, *por la que se reglan para la Comunidad de Madrid la implantación y la organización de la Educación Secundaria Obligatoria derivada de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*.
- RESOLUCIÓN de 16 de febrero de 2015, de las Viceconsejerías de Educación, Juventud y Deporte y de Organización Educativa, *por la que se dictan instrucciones para la celebración de la Prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI) de los alumnos del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria y del primer curso del Programa de Diversificación Curricular de la Comunidad de Madrid, en el curso 2014-2015*.

LIBROS

- GHYKA, MATILA C. (1978). *El número de oro: I los ritmos - II Los ritos*. Barcelona: ED. POSEIDÓN.
- GHYKA, MATILA C. (1983). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Barcelona: ED. POSEIDÓN.
- YVES CHEVALLARD, MARINA BOSCH, JOSEP GASCON (Diciembre 2000). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ED. ICE – HORSORI.
- J.COLERA, Mª J. OLIVEIRA, I. GAZTELU, M. MARTÍNEZ. (2012). *Matemáticas 3, Educación Secundaria*. Madrid: ED. ANAYA.
- J.COLERA, Mª J. OLIVEIRA, I. GAZTELU, M. MARTÍNEZ. (2003). *Educación Secundaria, Matemáticas, Propuesta Didáctica 3*. Madrid: ED. ANAYA.

ARTÍCULOS, TÉSIS Y TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN

- YOLANDA TOLEDO AGÜERO. (2013). *Sección áurea en Arte, Arquitectura y Música*. Departamento de Matemática Aplicada. Escuela de Ingeniería Técnica Agrícola. Ciudad

Real. Obtenido de: http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/240/La_seccion_aurea_en%20arte.pdf

- WILLIAM O. FLORES LÓPEZ, ROSANA RODRÍGUEZ LÓPEZ, RAMÓN M. VELGA FERNÁNDEZ. (2011). *UD: Semejanza y Razón Áurea*. WWW.MONOGRAFÍAS.COM. Obtenido de: http://www.monografias.com/trabajos-pdf4/unidad-didactica-razon-aurea/unidad-didactica-razon-aurea.pdf
- MARÍA ELENA RUIZ. (Agosto de 2006). *La proporcionalidad como objeto de enseñanza del docente*. UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE – ARGENTINA. C611-19. I REPEM – MEMORIAS. SANTA ROSA, LA PAMPA, ARGENTINA. Obtenido de: http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem06/memorias/comunicaciones/Relatos/CRE12.pdf
- LINA Mª JARAMILLO VÉLEZ (2012). *Tesis: La proporcionalidad y el desarrollo del pensamiento matemático*. UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA. Obtenido de: http://www.bdigital.unal.edu.co/6969/
- ANTONIO M. OLLER MARCÉN, JOSÉ Mº GAIRÍN SALLÁN. (2013). *La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización*. REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA (2013) 16 (3): 317-338. Obtenido de: http://www.clame.org.mx/relime/201302c.pdf
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). *PROGRAMA PISA DE LA OCDE. Qué es y para qué sirve*. Obtenido de: http://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

WEBS Y BLOGS

- VITUTOR (www.vitutor.com) *Plataforma de teleformación diseñada para el aprendizaje en línea de distintas materias de la ESO y Bachillerato*.
- DITUTOR (www.ditutor.com) *Diccionario de Matemáticas orientado a estudiantes de la ESO y Bachillerato*.
- PAULO PORTA. Fotografía e Imaxe Dixital. *La proporción Áurea*. Obtenido de: http://www.pauloporta.com/Fotografia/Artigos/epropaurea1.htm
- MATEMÁTICAS EN EL IES VALLE DEL OJA. Actividades y materiales del Departamento de Matemáticas: *La Divina Proporción "Lo pequeño es a lo grande como lo grande es al Todo"*. Obtenido de: https://matematicasiesoja.wordpress.com/autosemejanza-y-el-principio-de-autosimilitud/
- EDUCAREX. GOBIERNO DE EXTREMADURA. *Pruebas de acceso Módulo III. Proporciones geométricas*. Obtenido de:

http://www.educarex.es/pub/cont/com/0019/documentos/pruebas-acceso/contenidos/modulo_III/matematicas/proporciones_geometricas.pdf

- MODESTO GARCÍA. (2013). *La Proporción Áurea en el Diseño de logotipos*. WWW.BRANDEMIA.ORG. Obtenido de: http://www.brandemia.org/la-proporcion-aurea-en-el-diseno-de-logotipos
- J. M. BARRAGÁN, A. MOLINA, J. M. FERNÁNDEZ. *Proporcionalidad*. JUNTA DE ANDALUCÍA. IES ARROYO. Obtenido de: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/numeros/proporcionalidad/teoriaproporcionalidad/teoriaproporcionalidad.htm
- PAULINO VALDERAS. (2010). *La Gran Pirámide de Keops: pi por la raíz de fi es casi cuatro*. Granada: EL MATENAVEGANTE. Obtenido de: http://elmatenavegante.blogspot.com.es/2010/01/la-gran-piramide-de-keops-pi-por-la.html
- INSTITUTO NACIONAL DE EVALUACIÓN EDUCATIVA (INEE). *Estímulos PISA liberados como recursos didácticos de Matemáticas. Aritmética y Álgebra*. MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE (ESPAÑA). Obtenido de: http://recursostic.educacion.es/inee/pisa/matematicas/aritmetica.htm
- VICECONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, JUVENTUD Y DEPORTES. COMUNIDAD DE MADRID. *Pruebas de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI).Secundaria – Matemáticas*. Obtenido de: http://www.madrid.org/cs/Satellite?c=CM_InfPractica_FA&cid=1142674185195&idConsejeria=1109266187254&idListConsj=1109265444710&idOrganismo=1142287728226&pagename=ComunidadMadrid%2FEstructura

VIDEOS Y MULTIMEDIA

- WWW.ANGELITOONS.COM. *Las aventuras de Troncho y Poncho: proporcionalidad*. Obtenido de: https://www.youtube.com/watch?v=9QjVXWqS8Q4
- ANTONIO PÉREZ. *Más por Menos – El número ÁUreo*. 26 Sep 1996. RTVE. Obtenido de: http://www.rtve.es/alacarta/videos/mas-por-menos/aventura-del-saber-serie-mas-menos-numero-aureo/1290977/
- © DISNEY (1959). *Donald en el país de las Matemágicas*. Obtenido de: https://www.youtube.com/watch?v=9R8zC8K7C0E
- MICHAEL JHON BLAKE. (2012). *What Phi (the golden ratio) Sounds Like*. Obtenido de: https://www.youtube.com/watch?t=133&v=W_Ob-X6DMI4
- CANAL ENCUENTRO. *Horizontes Matemática - Capítulo 2 – Proporcionalidad*. MINISTERIO DE EDUC. ARGENTINA. Obtenido de: https://vimeo.com/12367599

7. ANEXOS

7.1. ANEXO I: RELACIONES TRANSVERSALES DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ESO

1º DE LA ESO	LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD (RELACIONES TRANSVERSALES)	MATEMÁTICAS	NÚMEROS (ARITMÉTICA)	Las magnitudes y su medida. El sistema métrico decimal. Unidades de longitud, masa, capacidad, superficie y volumen. Transformación de unidades de una misma magnitud. Relación entre capacidad y volumen. Unidades monetarias: el euro, el dólar etc. Conversiones monetarias y cambio de divisas. Porcentajes. Cálculo mental y escrito con porcentajes habituales. Magnitudes directamente proporcionales. Regla de tres: ley del doble, triple, mitad, etc. Aplicación a la resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa. Utilización de ejemplos en los que intervienen magnitudes no directamente proporcionales. Razón y proporción.
			ÁLGEBRA	Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas. Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.
			GEOMETRÍA	Elementos básicos de la geometría del plano: líneas, segmentos, ángulos. Utilización de la terminología adecuada para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones del mundo físico. Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano empleando métodos inductivos y deductivos. Paralelismo y perpendicularidad entre rectas. Relaciones entre ángulos. Construcciones geométricas sencillas. Descripción de las figuras planas elementales: triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares. Clasificación de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes criterios. Estudio de sus propiedades características y relaciones en estos polígonos. Construcción de triángulos y polígonos regulares con los instrumentos de dibujo habituales. Triángulos. Cálculo de áreas y perímetros de las figuras planas elementales. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. Circunferencias, círculos, arcos y sectores circulares. Empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.
			FUNCIONES Y GRÁFICAS	El plano cartesiano. Ejes de coordenadas. Utilización de las coordenadas cartesianas para representar e identificar puntos. Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de ejemplos en los que las magnitudes no son directamente proporcionales. Identificación de otras relaciones de dependencia sencillas. Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales y el mundo de la información.
			ESTADÍSTICA	Diferentes formas de recogida de información. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Frecuencias absolutas y relativas. Diagramas de barras, de líneas y de sectores. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos estadísticos.
		OTRAS DISCIPLINAS	ECONOMÍA	Estos contenidos se verán en 3º de la ESO.
			OBJETOS DISEÑOS DE LA VIDA COTIDIANA	Estos contenidos se verán en 3º de la ESO.
			CIENCIAS Y NATURALEZA	Estos contenidos se verán en 3º de la ESO.
			MÚSICA	Estos contenidos se verán en 3º de la ESO.
			ARTE: PINTURA Y ESCULTURA	Estos contenidos se verán en 3º de la ESO.
			ARQUITECTURA	Estos contenidos se verán en 3º de la ESO.

2º DE LA ESO	**LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD (RELACIONES TRANSVERSALES)**	**MATEMÁTICAS**	**NÚMEROS (ARITMÉTICA)**	Utilización de la forma de cálculo mental, escrito o con calculadora, y de la estrategia para contar o estimar cantidades más apropiadas a la precisión exigida en el resultado y a la naturaleza de los datos. Porcentajes. Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes. Uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes. Cálculo de aumentos y disminuciones porcentuales. proporcionalidad directa e inversa: análisis de tablas. Razón de proporcionalidad. Magnitudes directamente proporcionales. Regla de tres simple. Magnitudes inversamente proporcionales. Resolución de problemas relacionados con la vida cotidiana en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa.
			ÁLGEBRA	El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y expresar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Interpretación de las soluciones.
			GEOMETRÍA	Idea de semejanza: figuras semejantes. Ampliación y reducción de figuras: razón de semejanza y escalas. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Elementos básicos de la geometría del espacio: puntos, rectas y planos. Utilización de propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros para resolver problemas del mundo físico. La esfera: descripción y propiedades. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes
			FUNCIONES Y GRÁFICAS	Gráficas cartesianas. Elaboración de una gráfica a partir de una tabla de valores o de una expresión algebraica sencilla que relacione dos variables. Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica. Identificación de magnitudes proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores o de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales. Construcción de tablas y gráficas a partir de la observación y experimentación en casos prácticos. Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales y el mundo de la información. Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.
			ESTADÍSTICA	Estadística unidimensional. Población y muestra. Distribuciones discretas. Recuento de datos. Organización de los datos. Frecuencia absoluta y relativa. Frecuencias acumuladas. Construcción e interpretación de tablas de frecuencias y diagramas de barras y de sectores. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos estadísticos.
		OTRAS DISCIPLINAS	**ECONOMÍA**	Estos contenidos se verán en 3º de la ESO.
			OBJETOS Y DISEÑOS DE LA VIDA COTIDIANA	Estos contenidos se verán en 3º de la ESO.
			CIENCIAS Y NATURALEZA	Estos contenidos se verán en 3º de la ESO.
			MÚSICA	Estos contenidos se verán en 3º de la ESO.
			ARTE: PINTURA Y ESCULTURA	Estos contenidos se verán en 3º de la ESO.
			ARQUITECTURA	Estos contenidos se verán en 3º de la ESO.

3º DE LA ESO	LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD (RELACIONES TRANSVERSALES)	MATEMÁTICAS	**NÚMEROS (ARITMÉTICA)**	proporcionalidad simple directa e inversa. Repartos proporcionales: resolución de problemas. Porcentajes: Tanto por ciento de una cantidad, porcentaje correspondiente a una proporción, aumentos y disminuciones porcentuales. Variaciones porcentuales encadenadas.
			ÁLGEBRA	Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas. Interpretación crítica de las soluciones.
			GEOMETRÍA	Teorema de Tales. Potencia de un punto. proporcionalidad en el Teorema de la Altura y el Teorema del Cateto. Áreas y volúmenes de figuras proporcionales. Polígonos semejantes. La proporción áurea: Razón áurea, construcción de la sección áurea de un segmento y de un segmento áureo, proporción áurea en el pentágono regular, decágono regular, hexágono regular, poliedros regulares, rectángulo áureo, espiral áurea y la sucesión de Fibonacci. Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico. Reconocimiento de la geometría en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas. Interpretación de mapas y resolución de problemas asociados. Estudio de formas, configuraciones y relaciones geométricas. Cálculo de áreas y volúmenes.
			FUNCIONES Y GRÁFICAS	La proporcionalidad en las funciones y gráficas. proporcionalidad directa e inversa entre dos magnitudes. Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión algebraica. Relaciones funcionales. Distintas formas de expresar una función. Uso de las tecnologías de la información para el análisis y reconocimiento de propiedades de funciones. Formulación de conjeturas sobre el fenómeno representado por una gráfica y sobre su expresión algebraica. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
			ESTADÍSTICA	Tablas de frecuencias. Diagramas de barras. Polígonos de frecuencias. Histogramas. Diagramas de sectores. Pictogramas. Estimación y proporcionalidad. Concepto de escala. Estimación del tamaño de una población por muestreo mediante la proporcionalidad. Interpretación de tablas de frecuencias y gráficos estadísticos. Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias. Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.
		OTRAS DISCIPLINAS	**ECONOMÍA**	Los porcentajes en la economía. Interés simple e interés compuesto. Período de capitalización.
			OBJETOS Y DISEÑOS DE LA VIDA COTIDIANA	La proporción $\sqrt{2}$ de la norma DIN en las hojas de papel. La proporción áurea en los objetos y diseños de la vida cotidiana: Tarjetas, logotipos, coches, etc.
			CIENCIAS Y NATURALEZA	Problemas del mundo físico: Problemas de mezclas y aleaciones, problemas de velocidades (encuentros y alcances), problemas de caudales (llenado y vaciado). La proporción áurea en la naturaleza: Armonías humanas, antropometría áurea, crecimientos vegetales y animales, la serie de Fibonacci y la proporción áurea en otras formas de la naturaleza.
			MÚSICA	La armonía pitagórica en la música. Las relaciones entre el número áureo y las proporciones musicales: Diapasón, diatéseron y diapente. La proporción áurea en los instrumentos: Piano e instrumentos de cuerda. La melodía de Φ.
			ARTE: PINTURA Y ESCULTURA	Ejemplos clave de la presencia razón áurea en la pintura y escultura a lo largo de la historia. Escultura egipcia. Escultura clásica griega. Pintura gótica. Pintura renacentista: pintura del quattrocento, pintura y escultura cinquecento, pintura italiana manierista. Pintura barroca holandesa. Pintura barroca española. Arte del s XVIII: Pintura rococó. Arte del s XIX: Pintura clasicista, movimientos impresionistas. Arte del s XX: pintura neoplasticista, constructivismo ruso.
			ARQUITECTURA	Ejemplos clave de la presencia de la razón áurea en la arquitectura a lo largo de la historia. Arquitectura megalítica. Arquitectura egipcia. Arquitectura clásica: Grecia y Roma. Arquitectura gótica: francesa y española. Arquitectura renacentista: italiana del quattrocento, y arquitectura renacentista española. Arquitectura rococó. Arquitectura de los siglos XIX y XX: constructivismo ruso, Gaudí y Le Corbusier.

4º DE LA ESO OPCIÓN A	**LA ENSEÑANZA DE LA PROPORCIONALIDAD (RELACIONES TRANSVERSALES)**	**MATEMÁTICAS**	**NÚMEROS (ARITMÉTICA)**	Proporcionalidad directa e inversa: resolución de problemas. Porcentajes. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes encadenados.
			ÁLGEBRA	Resolución de problemas cotidianos y de otros campos de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
			GEOMETRÍA	Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas. Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana. Utilización de otros conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.
			FUNCIONES Y GRÁFICAS	Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión algebraica. Análisis de resultados utilizando el lenguaje matemático adecuado.
			ESTADÍSTICA	Variable discreta. Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias y de gráficos estadísticos: gráficos de barras, de sectores, diagramas de caja y polígonos de frecuencias. Uso de la hoja de cálculo.
		OTRAS DISCIPLINAS	**ECONOMÍA**	Los porcentajes en la economía. Aumentos y disminuciones porcentuales. Porcentajes encadenados. Interés simple y compuesto.
			OBJETOS Y DISEÑOS DE LA VIDA COTIDIANA	Estos contenidos ya se han visto en 3º de la ESO.
			CIENCIAS Y NATURALEZA	Estos contenidos ya se han visto en 3º de la ESO.
			MÚSICA	Estos contenidos ya se han visto en 3º de la ESO.
			ARTE: PINTURA Y ESCULTURA	Estos contenidos ya se han visto en 3º de la ESO.
			ARQUITECTURA	Estos contenidos ya se han visto en 3º de la ESO.

7.2. ANEXO II: OBJETIVOS DIDÁCTICOS Y RECURSOS DE LAS ACTIVIDADES

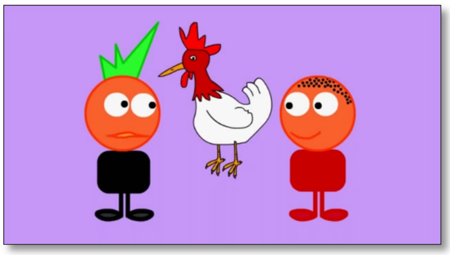
ACTIVIDAD 1: INTRODUCCIÓN A LA PROPORCIONALIDAD. MAGNITUDES Y UNIDADES DE MEDIDA

Objetivos didácticos: Motivar al alumnado e introducirles al tema de la proporcionalidad. Dar a conocer el calendario de la secuencia de esta UD con la metodología a seguir, actividades, objetivos y criterios de evaluación. Repasar las nociones y conceptos clave sobre magnitudes y unidades de medida. Identificar y reconocer magnitudes en el mundo que nos rodea.

Recursos: Pizarra Digital Interactiva (PDI) o convencional. Mapa conceptual de la UD. Ficha resumen. Hoja de ejercicios y problemas 1. Si el aula dispone de proyector y/o pantalla multimedia proyectaremos el siguiente vídeo:

Las aventuras de Troncho y Poncho: proporcionalidad.

https://www.youtube.com/watch?v=9QjVXWqS8Q4



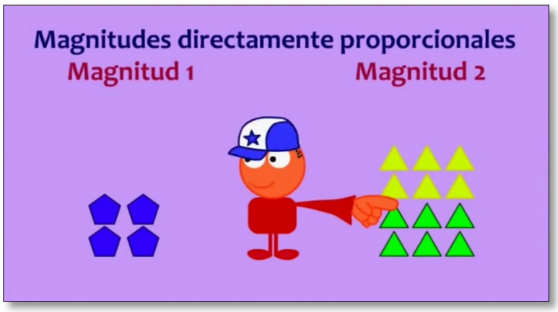
ACTIVIDAD 2: MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Objetivos didácticos: Saber calcular y elaborar los datos de una tabla de proporcionalidad simple directa. Entender y calcular la razón de proporcionalidad directa. Entender y dominar la técnica de la regla de tres simple directa.

Recursos empleados: PDI o convencional. Ficha resumen 1. Hoja de ejercicios y problemas 1. Si el aula dispone de proyector y/o pantalla multimedia proyectaremos el video anterior:

Las aventuras de Troncho y Poncho: proporcionalidad.

https://www.youtube.com/watch?v=9QjVXWqS8Q4



ACTIVIDAD 3: MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Objetivos didácticos: Saber calcular y elaborar los datos de una tabla de proporcionalidad simple inversa. Entender y calcular la razón de proporcionalidad inversa. Entender y dominar la técnica de la regla de tres simple inversa.

Recursos empleados: PDI o convencional. Ficha resumen 1. Hoja de ejercicios y problemas 1. Si el aula dispone de proyector y/o pantalla multimedia proyectaremos el video anterior:

Las aventuras de Troncho y Poncho: proporcionalidad.

https://www.youtube.com/watch?v=9QjVXWqS8Q4

ACTIVIDAD 4: PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Objetivos didácticos: Entender las relaciones de proporcionalidad entre tres o más magnitudes. Dominar la resolución de problemas en las que al menos tres magnitudes se encuentran en las siguientes relaciones de proporcionalidad: directa-directa, directa-inversa o viceversa e inversa-inversa. Saber hallar en cada caso la razón de proporcionalidad compuesta.

Recursos empleados: PDI o convencional. Ficha resumen 2. Hoja de ejercicios y problemas 3.

ACTIVIDAD 5: REPARTOS DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Objetivos didácticos: Conocer el fundamento así como dominar la técnica para la resolución de problemas que implique repartir de manera directamente proporcional una cantidad de una determinada magnitud entre varias cantidades de otra magnitud.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 3. Hoja de ejercicios y problemas 4.

ACTIVIDAD 6: REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Objetivos didácticos: Conocer el fundamento así como dominar la técnica para la resolución de problemas que implique repartir de manera inversamente proporcional una cantidad de una determinada magnitud entre varias cantidades de otra magnitud.

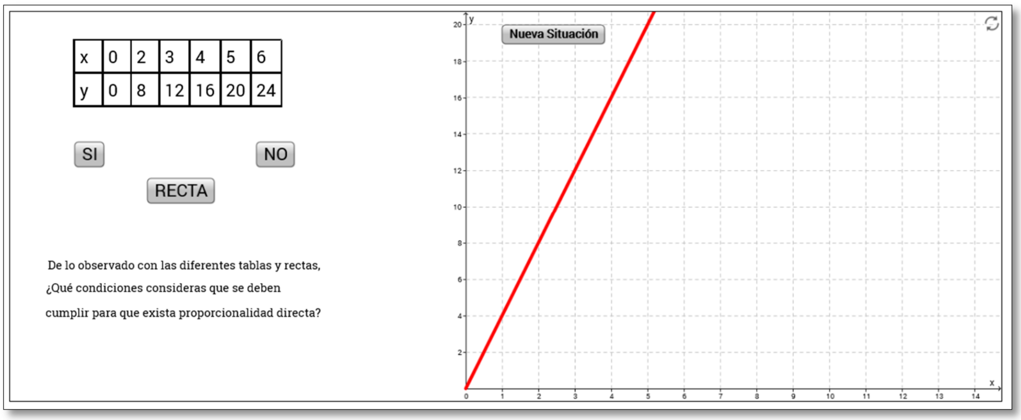
Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 3. Hoja de ejercicios y problemas 4.

ACTIVIDAD 7: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PROPORCIONALIDAD DIRECTA ENTRE DOS MAGNITUDES

Objetivos didácticos: Dominar y entender la representación gráfica de la proporcionalidad directa en un sistema cartesiano. Identificar la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas con la proporcionalidad directa. Dominar la expresión algebraica de la ecuación de una recta así como su representación en el diagrama cartesiano.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 4. Hoja de ejercicios y problemas 5. GeoGebra.

Ejemplo de presentación con GeoGebra: Recta y proporcionalidad directa

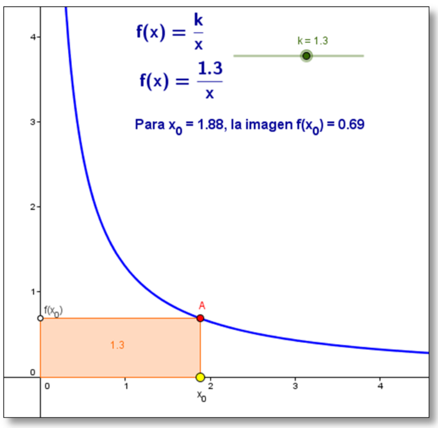


ACTIVIDAD 8: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA PROPORCIONALIDAD INVERSA ENTRE DOS MAGNITUDES

Objetivos didácticos: Dominar y entender la representación gráfica de la proporcionalidad inversa en un sistema cartesiano. Identificar la ecuación de una hipérbola. Dominar la expresión algebraica de la ecuación de una hipérbola así como su representación en el diagrama cartesiano.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 4. Hoja de ejercicios y problemas 5. GeoGebra.

Ejemplo de presentación con GeoGebra: Hipérbola y proporcionalidad inversa



ACTIVIDAD 9: PROBLEMAS DE MEZCLAS Y ALEACIONES

Objetivos didácticos: Identificar correctamente las unidades de medida típicas implicadas en las mezclas. Dominar el cambio de unidades. Saber plantear y resolver problemas de mezclas y aleaciones mediante la correcta organización de datos en tablas.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 5. Hoja de ejercicios y problemas 6.

ACTIVIDAD 10: PROBLEMAS DE VELOCIDADES

Objetivos didácticos: Identificar correctamente las unidades de medida de distancia tiempo y velocidad. Dominar el cambio de unidades. Recordar y aplicar la definición del concepto de velocidad. Dominar y adquirir destreza en el planteamiento y resolución de problemas relacionados con encuentros y alcances.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 5. Hoja de ejercicios y problemas 6.

ACTIVIDAD 11: PROBLEMAS DE CAUDALES

Objetivos didácticos: Identificar el volumen, tiempo y caudal junto con sus unidades de medida más comunes. Dominar el cambio de unidades. Recordar y aplicar la definición de caudal. Resolver y plantear correctamente problemas relacionados con el llenado y vaciado de depósitos o similares.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 5. Hoja de ejercicios y problemas 6.

ACTIVIDAD 12: TANTO POR CIENTO DE UNA CANTIDAD

Objetivos didácticos: Saber expresar y calcular el tanto por ciento de una cantidad. Representar la fracción correspondiente a un porcentaje. Recordar y dominar las operaciones con fracciones y con números decimales.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 6. Hoja de ejercicios y problemas 7.

ACTIVIDAD 13: PORCENTAJE CORRESPONDIENTE A UNA PROPORCIÓN

Objetivos didácticos: Dominar el cálculo del % que representa una parte de una cierta magnitud respecto de un total de esa misma magnitud. Recordar la relación de proporcionalidad directa.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 6. Hoja de ejercicios y problemas 7.

ACTIVIDAD 14: AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

Objetivos didácticos: Comprender el concepto de aumento porcentual y disminución porcentual. Saber hallar correctamente el índice de variación. Reconocer, plantear y

resolver problemas típicos de variaciones porcentuales sencillas. Dominar el cálculo con números decimales.
Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 6. Hoja de ejercicios y problemas 7.

ACTIVIDAD 15: VARIACIONES PORCENTUALES ENCADENADAS
Objetivos didácticos: Identificar, plantear y resolver problemas que impliquen variaciones porcentuales encadenadas. Dominar los conceptos de incremento y disminución porcentual así como los índices de variación correspondientes.
Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 6. Hoja de ejercicios y problemas 7.

ACTIVIDAD 16: INTERÉS SIMPLE
Objetivos didácticos: Conocer, entender e identificar los conceptos de capital, rédito, tiempo e interés. Plantear y resolver problemas sobre el interés simple suponiendo que el rédito es anual, mensual y diario. Dominar las operaciones con porcentajes.
Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 7. Hoja de ejercicios y problemas 8.

ACTIVIDAD 17: INTERÉS COMPUESTO
Objetivos didácticos: Entender el concepto de interés compuesto. Plantear y resolver problemas relacionados con el interés compuesto. Entender el concepto de período de capitalización. Dominar el cálculo de réditos en función del tiempo.
Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 7. Hoja de ejercicios y problemas 8.

ACTIVIDAD 18: TABLA DE FRECUENCIAS
Objetivos didácticos: Realizar correctamente la elaboración de la distribución o tabla de frecuencias. Dominar el concepto de frecuencia absoluta. Entender la tipología de los datos estadísticos: datos aislados, marcas de clase de una distribución de datos agrupados en intervalos.
Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 8. Hoja de ejercicios y problemas 9.

ACTIVIDAD 19: DIAGRAMA DE BARRAS
Objetivos didácticos: Conocer cuándo se utilizan los diagramas de barras. Elaborar tablas de frecuencias absolutas y alturas. Dominar la forma de representación de este tipo de gráficos en ejes de coordenadas. Conocer y calcular la altura proporcional de cada barra en función de la frecuencia absoluta de cada dato y de la constante de proporcionalidad establecida.
Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 8. Hoja de ejercicios y problemas 9.

ACTIVIDAD 20: HISTOGRAMA Y POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Objetivos didácticos: Entender y representar histogramas. Comprender el concepto de intervalo y amplitud de una variable. Elaborar tablas de frecuencias absolutas y alturas. Dominar la representación de gráficos sobre ejes cartesianos.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 8. Hoja de ejercicios y problemas 9.

ACTIVIDAD 21: DIAGRAMA DE SECTORES

Objetivos didácticos: Entender y dominar la representación de diagramas de sectores. Calcular la constante de proporcionalidad directa. Elaborar tablas de datos, frecuencias absolutas y ángulos de cada sector.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 8. Hoja de ejercicios y problemas 9.

ACTIVIDAD 22: PICTOGRAMAS

Objetivos didácticos: Dominar la técnica para elaborar pictogramas. Dominar el concepto de frecuencia absoluta. Saber calcular el lado de una figura cuadrada a partir de su área.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 8. Hoja de ejercicios y problemas 9.

ACTIVIDAD 23: ESTIMACIÓN Y PROPORCIONALIDAD

Objetivos didácticos: Conocer y aplicar correctamente la proporcionalidad a la estimación de medidas a partir de imágenes, gráficos, fotografías o dibujos. Calcular relaciones de proporcionalidad entre alturas y áreas de objetos sencillos.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 9. Hoja de ejercicios y problemas 10.

ACTIVIDAD 24: CONCEPTO DE ESCALA

Objetivos didácticos: Dominar, entender y aplicar el concepto de escala. Representar a escala medidas en un mapa o un dibujo. Extraer información gráfica de un mapa o dibujo a partir de la escala. Medir distancias.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 9. Hoja de ejercicios y problemas 10.

ACTIVIDAD 25: ESTIMACIÓN DEL TAMAÑO DE UNA POBLACIÓN POR MUESTREO MEDIANTE LA PROPORCIONALIDAD

Objetivos didácticos: Saber estimar el tamaño de una población usando la proporcionalidad. Dividir gráficamente áreas rectangulares en cuadrados iguales. Dominar el cálculo de la constante de proporcionalidad directa.

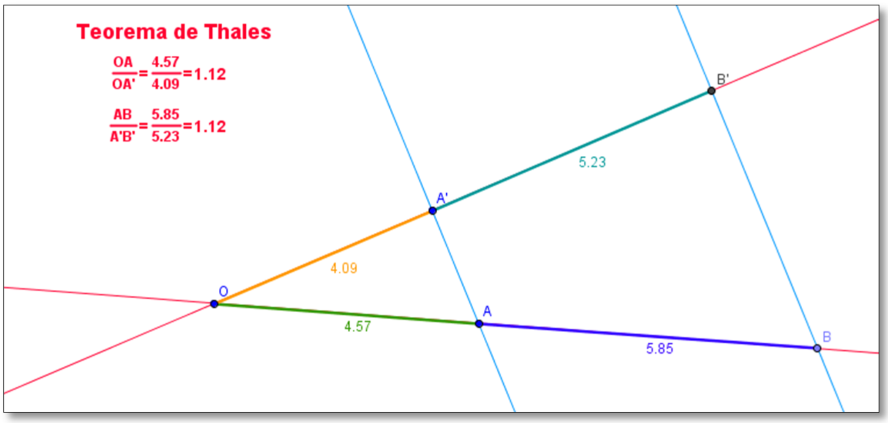
Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 9. Hoja de ejercicios y problemas 10.

ACTIVIDAD 26: TEOREMA DE TALES

Objetivos didácticos: Dominar la representación de rectas y segmentos en el plano. Definir, entender y aplicar las propiedades geométricas del Teorema de Tales. Aplicar el Teorema de Tales en los triángulos. Entender el concepto y las propiedades de la semejanza de triángulos.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 10. Hoja de ejercicios y problemas 11. Geogebra.

Ejemplo de presentación con GeoGebra: proporcionalidad en el Teorema de Tales

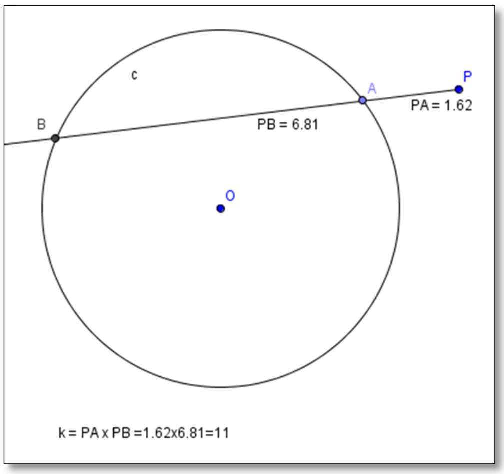


ACTIVIDAD 27: POTENCIA DE UN PUNTO

Objetivos didácticos: Dominar la representación gráfica de la potencia de un punto. Relacionar la potencia de un punto con la proporcionalidad inversa. Conocer e identificar los casos de semejanza de triángulos que se dan en este caso. Conocer y comprender la semejanza de triángulos y la identificación, distinción o equivalencia de la media de los ángulos de triángulos semejantes.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 10. Hoja de ejercicios y problemas 11. GeoGebra.

Ejemplo de presentación con GeoGebra: Potencia de un punto y proporcionalidad inversa

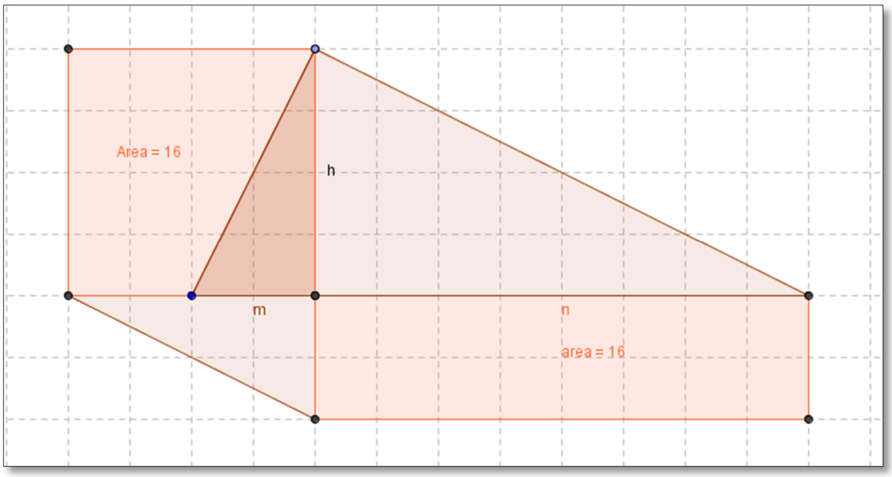


ACTIVIDAD 28: EL TEOREMA DE LA ALTURA Y EL TEOREMA DEL CATETO

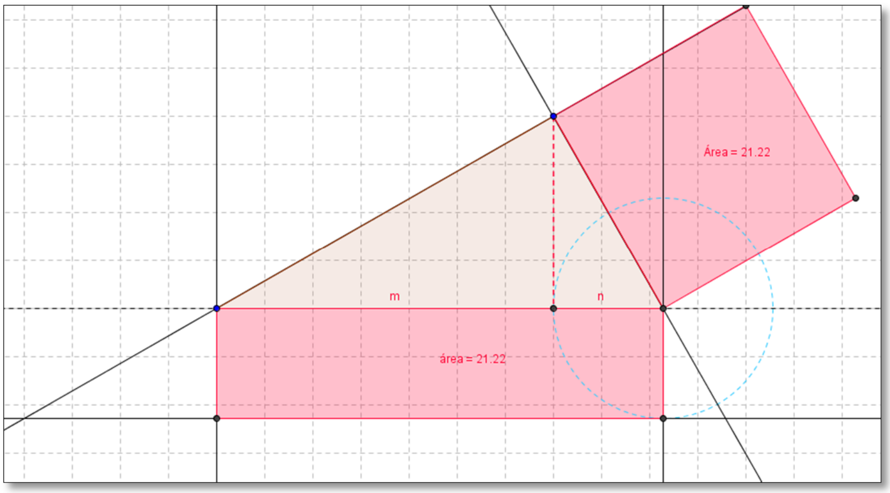
Objetivos didácticos: Enunciar y comprender la presencia de la proporcionalidad en el Teorema de la altura así como en el Teorema del cateto. Dominar la representación gráfica de triángulos así como identificar triángulos rectángulos semejantes y relacionar medidas de lados y ángulos.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 10. Hoja de ejercicios y problemas 11. GeoGebra.

Ejemplo de presentación con GeoGebra: La proporcionalidad en el Teorema de la Altura



Ejemplo de presentación con GeoGebra: La proporcionalidad en el Teorema del Cateto

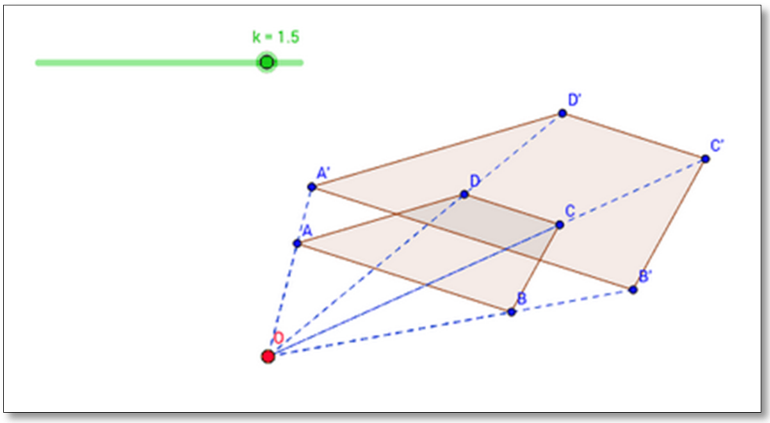


ACTIVIDAD 29: POLÍGONOS SEMEJANTES

Objetivos didácticos: Identificar y comprender cuándo dos polígonos son semejantes. Hallar la razón de semejanza de dos polígonos semejantes.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 11. Hoja de ejercicios y problemas 12. GeoGebra.

Ejemplo de presentación con GeoGebra: La proporcionalidad en los polígonos semejantes

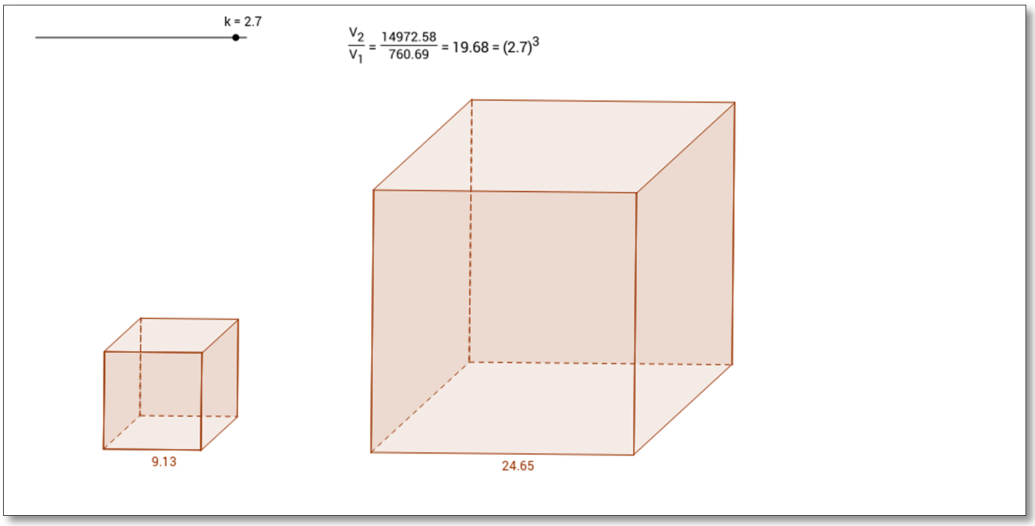


ACTIVIDAD 30: ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS PROPORCIONALES

Objetivos didácticos: Reconocer y relacionar la proporcionalidad entre áreas y volúmenes de figuras geométricas sencillas. Saber hallar la razón de proporcionalidad en cada caso.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 11. Hoja de ejercicios y problemas 12. GeoGebra.

Ejemplo de presentación con GeoGebra: La proporcionalidad en las figuras semejantes

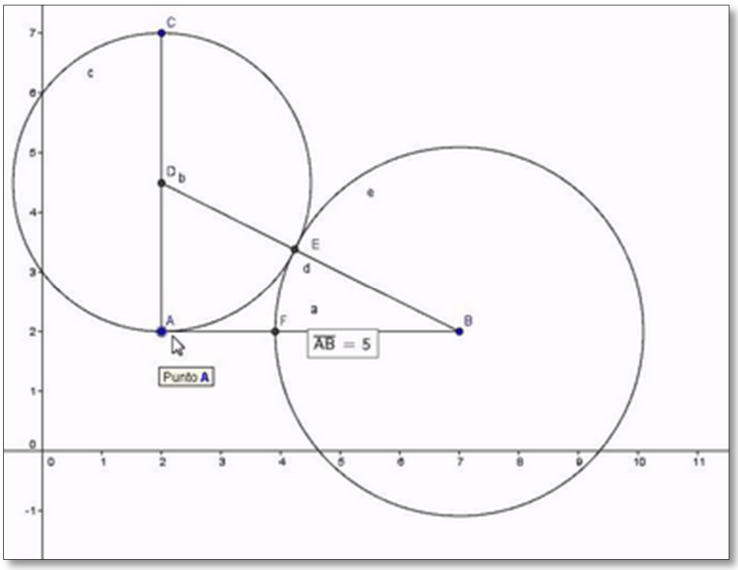


ACTIVIDAD 31: RAZÓN ÁUREA Y SEGMENTO ÁUREO

Objetivos didácticos: Identificar el valor, la denominación y los símbolos del número áureo. Reconocer y entender el concepto de número irracional. Comprender y demostrar la proporción áurea mediante expresiones algebraicas. Construir gráficamente la sección áurea de un segmento. Construir gráficamente un segmento áureo.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 12. Hoja de ejercicios y problemas 13. GeoGebra.

Ejemplo de presentación con GeoGebra: La construcción de la sección áurea de un segmento

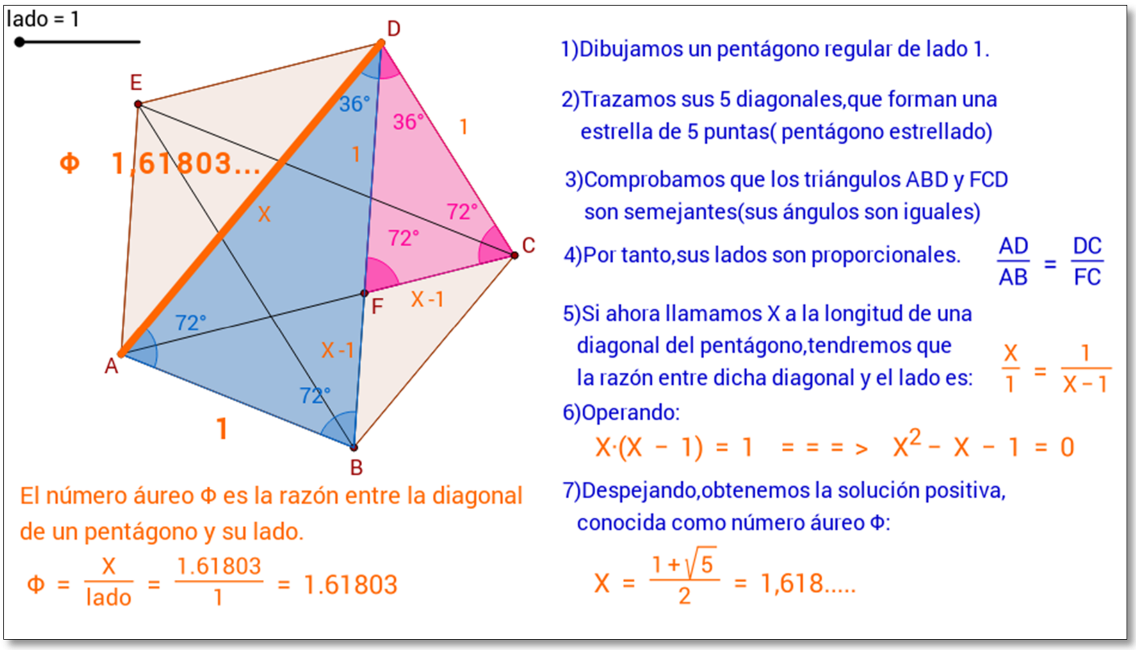


ACTIVIDAD 32: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL PENTÁGONO REGULAR

Objetivos didácticos: Identificar las proporciones áureas en las partes fundamentales y características de un pentágono regular. Dominar y entender la semejanza de triángulos y las propiedades de los triángulos rectángulos. Dominar el cálculo de áreas de triángulos.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 12. Hoja de ejercicios y problemas 13. GeoGebra.

Ejemplo de presentación con GeoGebra: La proporción áurea en el pentágono regular

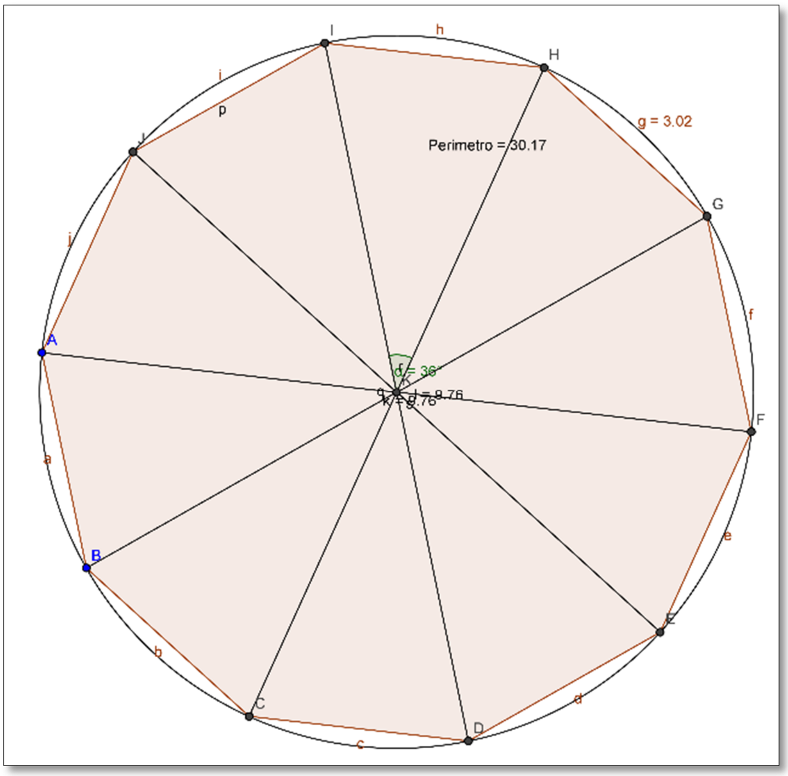


ACTIVIDAD 33: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL DECÁGONO, Y EN OTRAS FIGURAS Y POLIEDROS REGULARES

Objetivos didácticos: Identificar la presencia de la proporción áurea en el decágono regular. Identificar la relación áurea entre el hexágono y el decágono. Conocer su existencia en los poliedros regulares.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 12. Hoja de ejercicios y problemas 13. GeoGebra.

Ejemplo de presentación con GeoGebra: La proporción áurea en el decágono regular

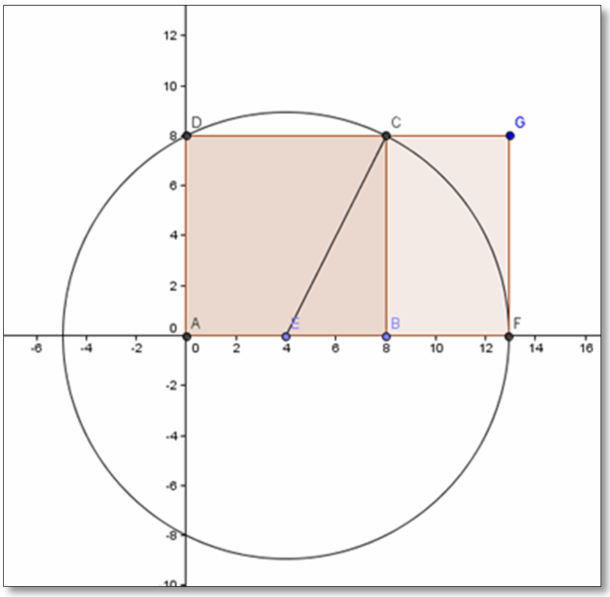


ACTIVIDAD 34: EL RECTÁNGULO ÁUREO Y LA ESPIRAL ÁUREA

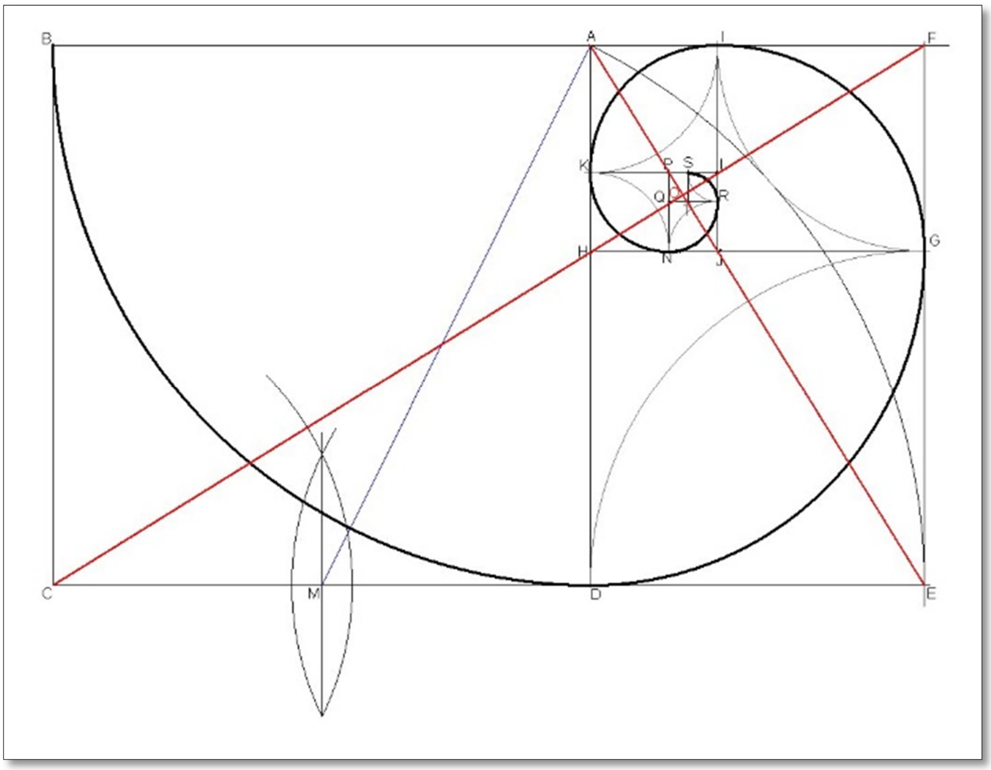
Objetivos didácticos: Conocer e identificar las características de un rectángulo áureo. Saber construir geométricamente este tipo de rectángulos. Conocer y construir el rectángulo áureo recíproco. Conocer, identificar y obtener las principales descomposiciones armónicas del rectángulo áureo así como de su recíproco. Saber representar y construir una espiral áurea a partir del crecimiento de sucesivos rectángulos áureos.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 12. Hoja de ejercicios y problemas 13. GeoGebra.

Ejemplo de presentación con GeoGebra: El rectángulo áureo



Ejemplo de presentación con GeoGebra: La espiral áurea

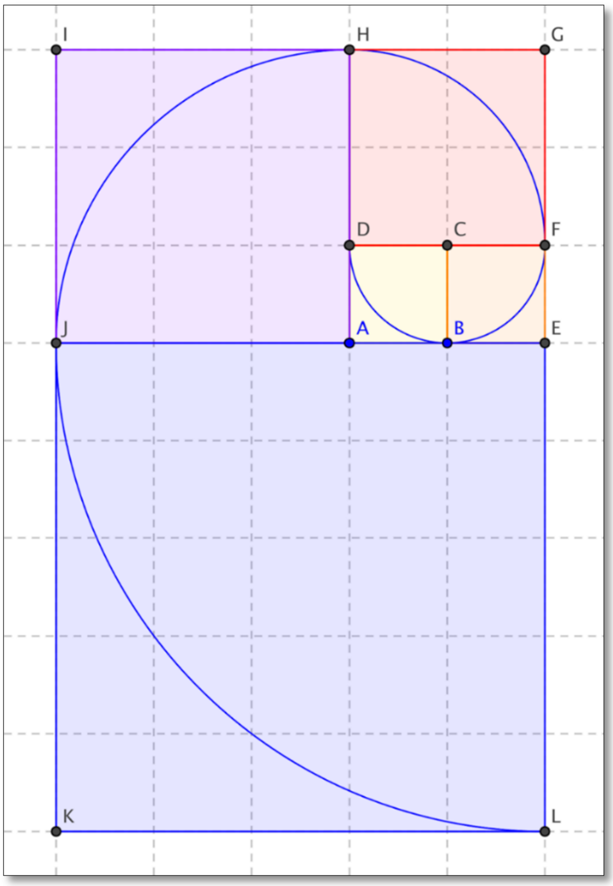


ACTIVIDAD 35: LA SUCESIÓN DE FIBONACCI Y EL NÚMERO ÁUREO

Objetivos didácticos: Definir, identificar y hallar los términos de una sucesión de Fibonacci. Conocer que el límite de la razón de dos términos consecutivos de estas series tiende al número áureo. Representar gráficamente la serie de Fibonacci mediante cuadrados sucesivos. Representar gráficamente la espiral de Fibonacci.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 12. Hoja de ejercicios y problemas 13. GeoGebra.

Ejemplo de presentación con GeoGebra: La espiral de Fibonacci



ACTIVIDAD 36: LA PROPORCIONALIDAD EN LAS HOJAS DE PAPEL

Objetivos didácticos: Conocer los fundamentos y estándares de la norma DIN. Plantear y resolver problemas con la proporción $\sqrt{2}$.

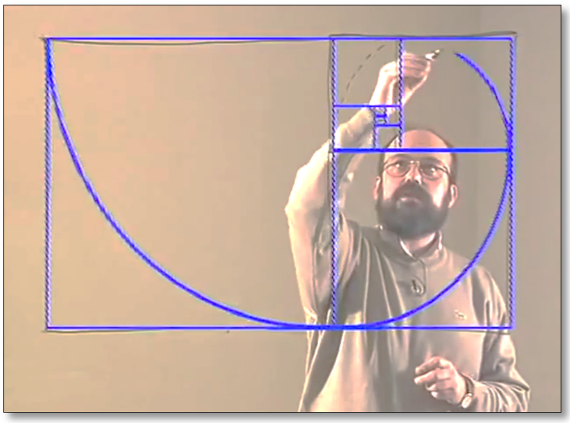
Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 13. Hoja de ejercicios y problemas 14.

ACTIVIDAD 37: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LOS OBJETOS Y DISEÑOS DE LA VIDA COTIDIANA

Objetivos didácticos: Conocer e identificar objetos y diseños que contengan la proporción áurea o relaciones áureas más o menos complejas entre sus medidas. Entender que con la proporción áurea se busca crear diseños u objetos armoniosos.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 13. Hoja de ejercicios y problemas 14. Si el aula dispone de proyector y/o pantalla multimedia proyectaremos el siguiente vídeo:

ANTONIO PÉREZ. *Más por Menos – El número aúreo*. 26 Sep 1996. RTVE. http://www.rtve.es/alacarta/videos/mas-por-menos/aventura-del-saber-serie-mas-menos-numero-aureo/1290977/



ACTIVIDAD 38: ARMONÍAS HUMANAS

Objetivos didácticos: Conocer y entender el significado de las armonías humanas. Reconocer las proporciones áureas que aparecen en el "El hombre de Vitruvio" de Leonardo da Vinci. Saber que las relaciones áureas en las representaciones del cuerpo humano se dan en las obras de muchos otros artistas. Identificar las proporciones en el Modulor de Le Corbusier. Conocer e identificar las proporciones áureas en el cuerpo humano.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 14. Hoja de ejercicios y problemas 15.

ACTIVIDAD 39: EL NÚMERO ÁUREO EN LA NATURALEZA

Objetivos didácticos: Identificar la presencia de la sucesión y la espiral de Fibonacci en ejemplos de la naturaleza: crecimientos vegetales y animales. Identificar la proporción áurea en otras formas de la naturaleza.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 14. Hoja de ejercicios y problemas 15.

ACTIVIDAD 40: LA ARMONÍA PITAGÓRICA EN LA MÚSICA. LAS RELACIONES ENTRE EL NÚMERO ÁUREO Y LAS PROPORCIONES MUSICALES

Objetivos didácticos: Definir y entender el concepto de armonía pitagórica. Identificar las diferentes fracciones de una cuerda y deducir las relaciones de números enteros y la armonía de forma matemática. Deducir matemáticamente las relaciones entre el número áureo y las proporciones musicales: diapasón, diapente y diatéseron. Recordar la presencia del número áureo en las distintas figuras geométricas: rectángulo recíproco, pentágono y triángulo pitagórico.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 15.

ACTIVIDAD 41: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LOS INSTRUMENTOS

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar la proporción áurea o la presencia de las serie de Fibonacci de manera general entre las distintas partes de algunos instrumentos como por ejemplo: el piano, violín y guitarra. Conocer algunas curiosidades más sobre el número áureo.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 15. Si el aula dispone de proyector y/o pantalla multimedia proyectaremos los siguientes vídeos:

What Phi (the golden ratio) Sounds Like.

https://www.youtube.com/watch?t=133&v=W_Ob-X6DMI4

Donald en el país de las Matemágicas. © Disney, 1959.

https://www.youtube.com/watch?v=9R8zC8K7C0E

ACTIVIDAD 42: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE EGIPCIO

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras de arte egipcio. Representar las descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos artísticos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 16. Hoja de ejercicios y problemas 16.

ACTIVIDAD 43: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE CLÁSICO GRIEGO

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras de arte griego. Representar las descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos artísticos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 16. Hoja de ejercicios y problemas 16.

ACTIVIDAD 44: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE GÓTICO

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras de arte gótico. Representar las descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos artísticos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 16. Hoja de ejercicios y problemas 16.

ACTIVIDAD 45: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE RENACENTISTA

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras de arte renacentista. Representar las descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos artísticos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 16. Hoja de ejercicios y problemas 16.

ACTIVIDAD 46: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE BARROCO

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras del arte barroco. Representar las descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos artísticos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 16. Hoja de ejercicios y problemas 16.

ACTIVIDAD 47: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE DEL S XVII (ROCOCÓ)

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras de arte rococó. Representar las descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos artísticos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 16. Hoja de ejercicios y problemas 16.

ACTIVIDAD 48: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE DEL S XIX

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras de arte del siglo XIX. Representar las descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos artísticos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 16. Hoja de ejercicios y problemas 16.

ACTIVIDAD 49: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE DEL S XX

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras de arte del siglo XX. Representar las descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos artísticos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 16. Hoja de ejercicios y problemas 16.

ACTIVIDAD 50: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA MEGALÍTICA

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras arquitectónicas megalíticas. Representar las distintas descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos arquitectónicos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 17. Hoja de ejercicios y problemas 17.

ACTIVIDAD 51: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA EGIPCIA

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras arquitectónicas egipcias. Representar las distintas descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos arquitectónicos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 17. Hoja de ejercicios y problemas 17.

ACTIVIDAD 52: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA CLÁSICA: GRECIA Y ROMA

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras arquitectónicas del mundo clásico de Grecia y Goma. Representar las distintas descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos arquitectónicos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 17. Hoja de ejercicios y problemas 17.

ACTIVIDAD 53: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA GÓTICA

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras arquitectónicas de estilo gótico. Representar las distintas descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos arquitectónicos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 17. Hoja de ejercicios y problemas 17.

ACTIVIDAD 54: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA RENACENTISTA

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras arquitectónicas renacentistas. Representar las distintas descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos arquitectónicos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 17. Hoja de ejercicios y problemas 17.

ACTIVIDAD 55: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA ROCOCÓ

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras arquitectónicas del rococó. Representar las distintas descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos arquitectónicos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 17. Hoja de ejercicios y problemas 17.

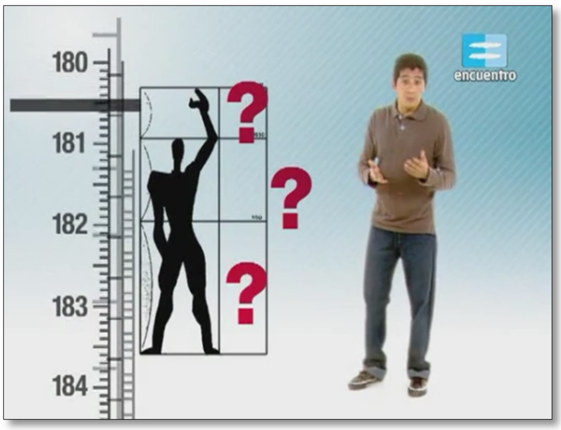
ACTIVIDAD 55: LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA DE LOS SS XIX Y XX

Objetivos didácticos: Reconocer e identificar las proporciones áureas y musicales en las distintas obras arquitectónicas de los ss XIX y XX. Representar las distintas descomposiciones armónicas e interpretar tanto geométrica como numéricamente la presencia del número áureo entre las proporciones de los ejemplos arquitectónicos antes mencionados.

Recursos: PDI o convencional. Ficha resumen 17. Hoja de ejercicios y problemas 17. Si el aula dispone de proyector y/o pantalla multimedia proyectaremos los últimos 15 minutos del siguiente vídeo:

HORIZONTES MATEMÁTICA - Capítulo 2 – PROPORCIONALIDAD.

https://vimeo.com/12367599



7.3. ANEXO III: FICHAS RESUMEN

FICHA RESUMEN 1
PROPORCIONALIDAD SIMPLE

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

A medida que aumenta la Magnitud A, la Magnitud B aumenta en la misma proporción que lo hace la Magnitud A o viceversa. O bien, a medida que disminuye la Magnitud A, la Magnitud B disminuye en la misma proporción que lo hace la Magnitud A o viceversa.

Tabla de proporcionalidad directa:

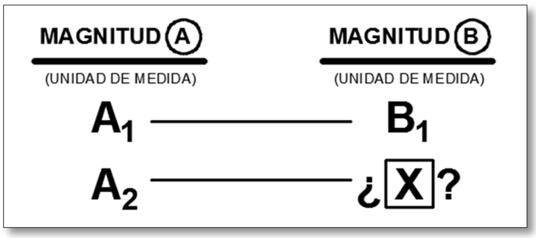
Magnitud A	A_1	A_2	$\dots$	A_i	$\dots$	A_n
Magnitud B	B_1	B_2	$\dots$	B_i	$\dots$	B_n

Razón de proporcionalidad directa:

$$k = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \cdots = \frac{A_i}{B_i} = \cdots = \frac{A_n}{B_n} \Rightarrow A_i = kB_i$$

$$\frac{1}{k} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2} = \cdots = \frac{B_i}{A_i} = \cdots = \frac{B_n}{A_n} \Rightarrow B_i = \frac{A_i}{k}$$

Si deseamos conocer un valor cualquiera de la tabla, podremos hallarlo de la siguiente manera:



$$k = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{x};\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{x} \Rightarrow x = \frac{A_2 B_1}{A_1}$$

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

A medida que aumenta la Magnitud A, la Magnitud B disminuye en la misma proporción que lo hace la Magnitud A o viceversa.

Tabla de proporcionalidad inversa:

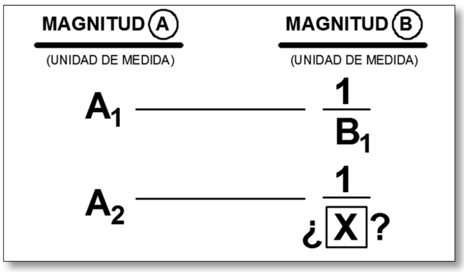
Magnitud A	A_1	A_2	$\dots$	A_i	$\dots$	A_n
Magnitud B	B_1	B_2	$\dots$	B_i	$\dots$	B_n

Razón de proporcionalidad inversa:

$$k = A_1 B_1 = A_2 B_2 = \cdots = A_i B_i = \cdots = A_n B_n \Rightarrow A_i = \frac{k}{B_i}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{A_1}\frac{1}{B_1} = \frac{1}{A_2}\frac{1}{B_2} = \cdots = \frac{1}{A_i}\frac{1}{B_i} = \cdots = \frac{1}{A_n}\frac{1}{B_n} \Rightarrow B_i = \frac{k}{A_i}$$

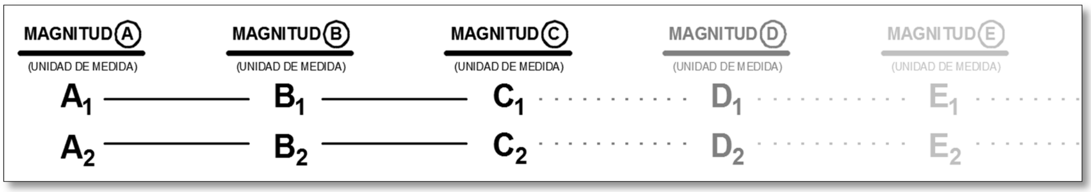
Si deseamos conocer un valor cualquiera de la tabla, podremos hallarlo de la siguiente manera:



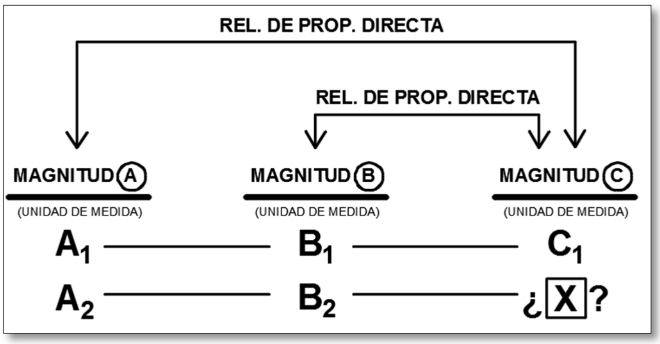
$$k = A_1 B_1 = A_2 x;\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{B_1}}{\frac{1}{x}} \Rightarrow x = \frac{A_1 B_1}{A_2}$$

FICHA RESUMEN 2
PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

TRES O MÁS MAGNITUDES EN RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD



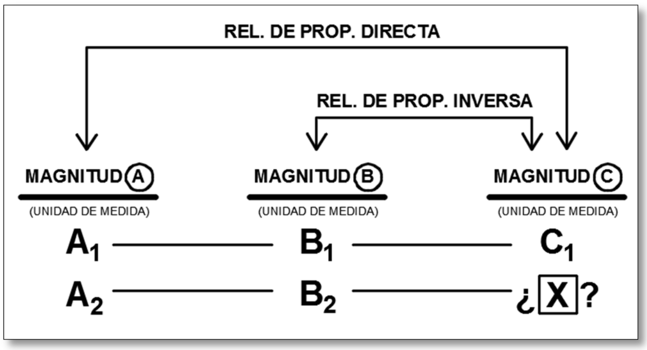
CASO DE TRES MAGNITUDES EN RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA-DIRECTA



Razón de proporcionalidad compuesta directa-directa:

$$k=\frac{C_1}{A_1B_1}=\frac{x}{A_2B_2}\ ;\ \frac{A_1}{A_2}\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{x}\Rightarrow\ x=\frac{C_1A_2B_2}{A_1B_1}$$

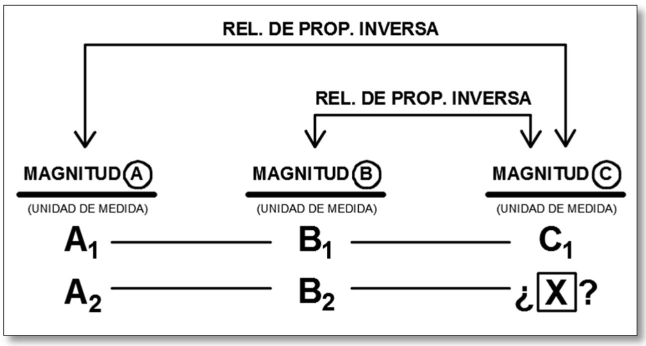
CASO DE TRES MAGNITUDES EN RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA-INVERSA



Razón de proporcionalidad compuesta directa-inversa:

$$k=\frac{B_1C_1}{A_1}=\frac{B_2x}{A_2};\ \frac{A_1}{A_2}\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_1}{x}\Rightarrow\ x=\frac{C_1A_2B_1}{A_1B_2}$$

CASO DE TRES MAGNITUDES EN RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA-INVERSA

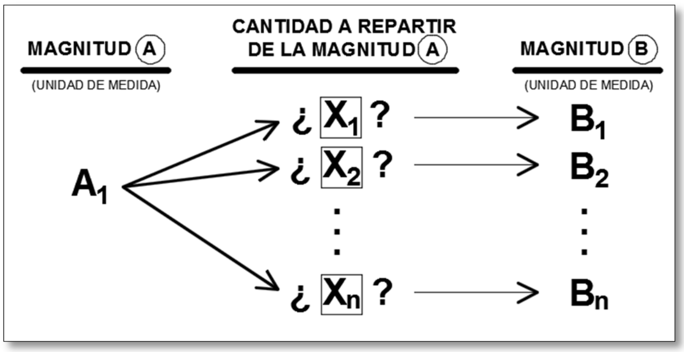


Razón de proporcionalidad compuesta inversa-inversa:

$$k=A_1B_1C_1=A_2B_2x;\ \frac{A_2}{A_1}\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_1}{x}\Rightarrow\ x=\frac{C_1A_1B_1}{A_2B_2}$$

FICHA RESUMEN 3
REPARTOS PROPORCIONALES

REPARTIR DE MANERA DIRECTAMENTE PROPORCIONAL UNA CANTIDAD DE UNA CIERTA MAGNITUD A ENTRE VARIAS CANTIDADES DE OTRA MAGNITUD B



$$Cantidad\ a\ repartir: A_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
$$TOTAL\ entre\ lo\ que\ se\ va\ a\ repartir\ esa\ cantidad = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$$

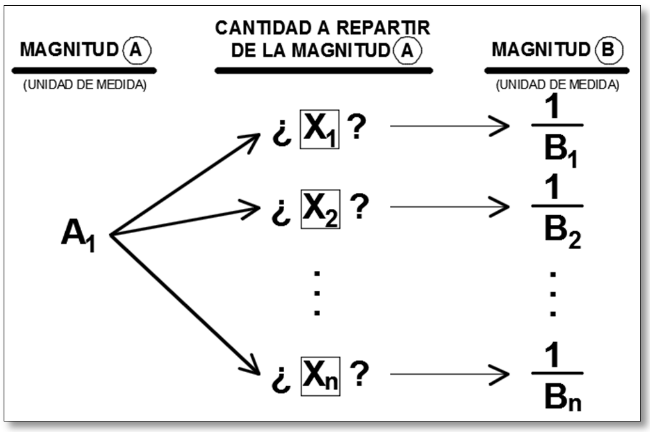
Cantidad unitaria a repartir:

$$k = \frac{A_1}{TOTAL} = \frac{A_1}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n} = \frac{x_1}{B_1} = \frac{x_2}{B_2} = \cdots = \frac{x_n}{B_n}$$

Por lo tanto, el reparto será:

$$Para\ B_1: \quad x_1 = kB_1 = \left(\frac{A_1}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n}\right) B_1;\ Para\ B_2: \quad x_2 = kB_2 = \left(\frac{A_1}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n}\right) B_2; \ldots;$$
$$Para\ B_n: \quad x_n = kB_n = \left(\frac{A_1}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n}\right) B_n$$

REPARTIR DE MANERA INVERSAMENTE PROPORCIONAL UNA CANTIDAD DE UNA CIERTA MAGNITUD A ENTRE VARIAS CANTIDADES DE OTRA MAGNITUD B



$$Cantidad\ a\ repartir: A_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
$$TOTAL\ entre\ lo\ que\ se\ va\ a\ repartir\ esa\ cantidad = \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \cdots + \frac{1}{B_n}$$

Cantidad unitaria a repartir:

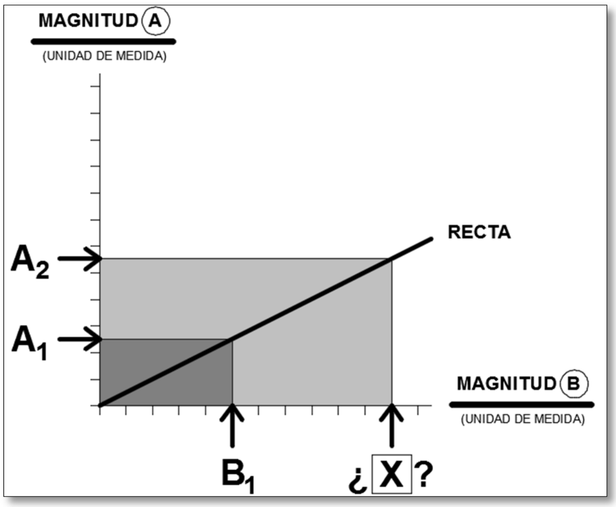
$$k = \frac{A_1}{TOTAL} = \frac{A_1}{\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \cdots + \frac{1}{B_n}} = \frac{x_1}{\frac{1}{B_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{B_2}} = \cdots = \frac{x_n}{\frac{1}{B_n}}$$

Por lo tanto, el reparto será:

$$Para\ B_1: \quad x_1 = k\frac{1}{B_1} = \left(\frac{A_1}{\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \cdots + \frac{1}{B_n}}\right)\frac{1}{B_1};\ Para\ B_2: \quad x_2 = k\frac{1}{B_2} = \left(\frac{A_1}{\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \cdots + \frac{1}{B_n}}\right)\frac{1}{B_2}; \ldots;\ Para\ B_n: \quad x_n =$$
$$k\frac{1}{B_n} = \left(\frac{A_1}{\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \cdots + \frac{1}{B_n}}\right)\frac{1}{B_n}$$

FICHA RESUMEN 4
LA PROPORCIONALIDAD EN LAS FUNCIONES Y GRÁFICAS

PROPORCIONALIDAD DIRECTA ENTRE DOS MAGNITUDES

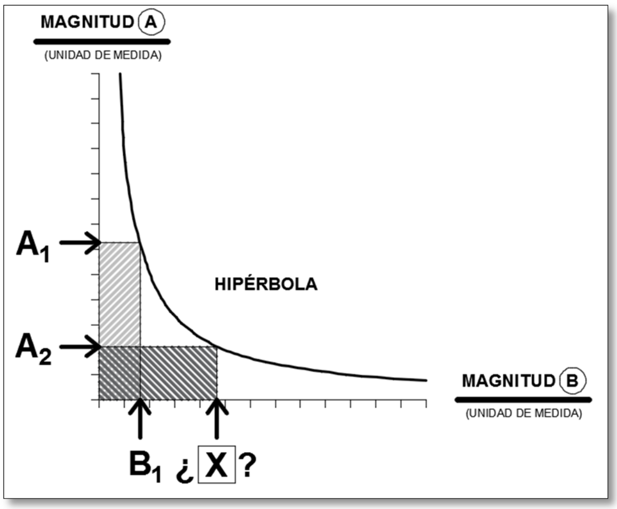


Se forman dos rectángulos cuyos lados son directamente proporcionales y por lo tanto comparten las mismas diagonales: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{x}$; La diagonal compartida pasa por el origen de coordenadas, y es una recta cuya pendiente, obviamente constante, es *k (la razón de proporcionalidad directa)*:

$$k = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{x}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta será: $y = kx$; o bien, en relación a dichas magnitudes se puede expresar como $A_i = kB_i$

PROPORCIONALIDAD INVERSA ENTRE DOS MAGNITUDES



Se forman dos rectángulos cuyos lados son inversamente proporcionales: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{B_1}}{\frac{1}{x}}$; De este modo, en ambos rectángulos se cumple que sus áreas son constantes e iguales a *k (la constante de proporcionalidad inversa)*:

$$k = A_1 B_1 = A_2 x$$

Existe una función que representa gráficamente esta propiedad entre dos magnitudes inversamente proporcionales, se llama función hiperbólica, y su ecuación general es: $y = \frac{k}{x}$; o bien, en relación a dichas magnitudes se puede expresar como $A_i = \frac{k}{B_i}$

FICHA RESUMEN 5
APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD A LOS PROBLEMAS DEL MUNDO FÍSICO

PROBLEMAS DE MEZCLAS Y ALEACIONES

Para plantear y resolver este tipo de problemas puede resultar de utilidad elaborar una tabla parecida a la siguiente:

	MAGNITUD A	*MAGNITUD B*	...
Nombre o título del 1º dato	$A_1[ud. de\ med.]$	$B_1[ud. de\ med.]$	...
Nombre o título del 2º dato	$A_2[ud. de\ med.]$	$B_2[ud. de\ med.]$	...
...	...	...	...
MEZCLA a calcular	$\boldsymbol{A_{MEZCLA}[ud. de\ med.]}$	$\boldsymbol{B_{MEZCLA}[ud. de\ med.]}$	...

No debemos olvidarnos de poner a la derecha de cada dato su correspondiente unidad de medida.

PROBLEMAS DE VELOCIDADES

Las magnitudes que intervienen, junto con sus unidades de medida más corrientes, son:

$$Distancia\ [\dots, mm, cm, m, km, \dots]\ Tiempo\ [\dots, s, min, h, días, \dots]\ Velocidad\ \left[\dots, \frac{m}{s}, \frac{km}{h}, \dots\right]$$

Se debe recordar la definición de Velocidad:

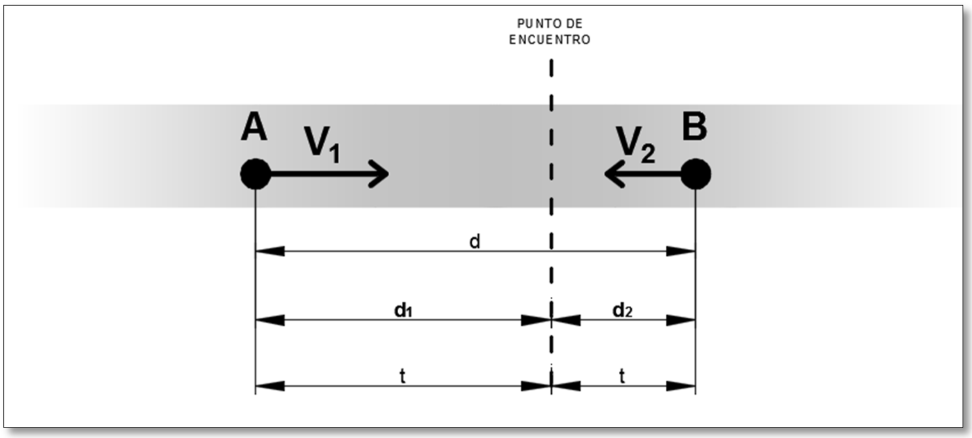
$$Velocidad = \frac{Distancia}{Tiempo} \Rightarrow Tiempo = \frac{Distancia}{Velocidad}$$

Los problemas tipo suelen ser: Problemas de encuentros y de alcances.

Problemas de encuentros

Aunque evidentemente pueden existir variaciones tanto en su forma de plantearse así como en las incógnitas buscadas, se suelen plantear de la siguiente manera:

Dos móviles salen el uno hacia el otro desde dos puntos A y B situados a una cierta distancia *d*. Si ambos móviles se desplazan a velocidades opuestas V_1 y V_2. Calcule en qué instante se encontrarán.



Ambos móviles recorrerán las distancias d_1 y d_2 en el mismo tiempo *t*, por lo tanto:

$$V_1 = \frac{d_1}{t} \Rightarrow d_1 = V_1 t; V_2 = \frac{d_2}{t} \Rightarrow d_2 = V_2 t$$

Por otro lado sabemos que:

$$d = d_1 + d_2 \Rightarrow d = V_1 t + V_2 t \Rightarrow d = t(V_1 + V_2)$$

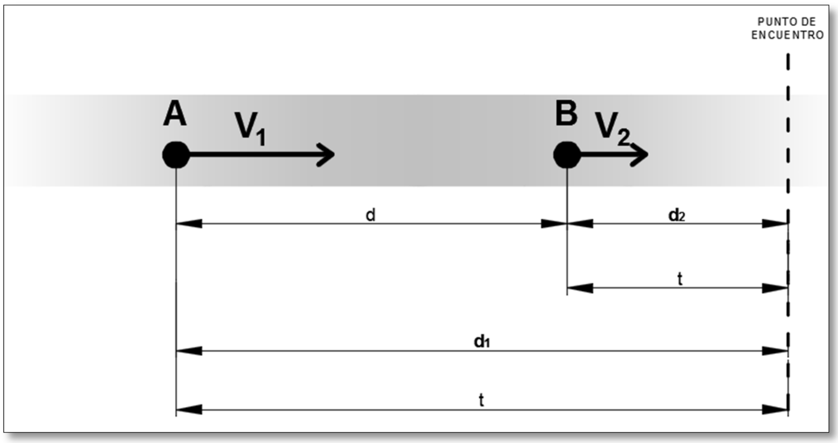
Por lo que el instante en el que ambos se encontrarán será:

$$t = \frac{d}{V_1 + V_2}$$

Problemas de alcances

Aunque evidentemente pueden existir variaciones tanto en su forma de plantearse así como en las incógnitas buscadas, se suelen plantear de la siguiente manera:

Dos móviles salen desde dos puntos A y B situados a una cierta distancia *d*. Si ambos móviles se desplazan en el mismo sentido a velocidades V_1 y V_2. Calcule en qué instante uno de los móviles alcanzará al otro.



Ambos móviles recorrerán las distancias d_1 y d_2 en el mismo tiempo *t*, por lo tanto:

$$V_1 = \frac{d_1}{t} \Rightarrow d_1 = V_1 t;\, V_2 = \frac{d_2}{t} \Rightarrow d_2 = V_2 t$$

Por otro lado sabemos que:

$$d = d_1 - d_2 \Rightarrow d = V_1 t - V_2 t \Rightarrow d = t(V_1 - V_2)$$

Por lo que el instante en el uno de los móviles alcanzará al otro será:

$$t = \frac{d}{V_1 - V_2}$$

PROBLEMAS DE CAUDALES

Las magnitudes que intervienen, junto con sus unidades de medida más comunes, son:

$$Volumen\ [\dots, hl, l, m^3, \dots]\ Tiempo\ [\dots, s, min, h, días, \dots]\ Caudal\ \left[\dots, \frac{l}{s}, \frac{l}{min}, \frac{m^3}{h}, \dots\right]$$

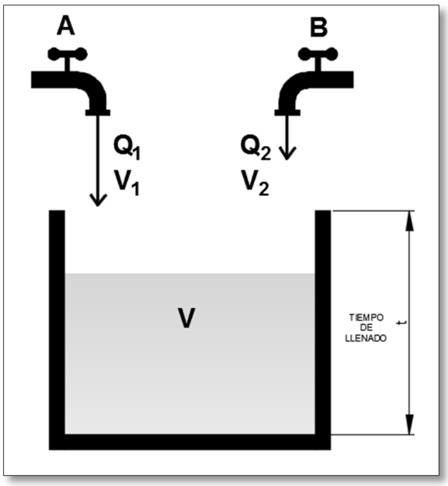
Se debe recordar la definición de Caudal: $Caudal = \frac{Volumen}{Tiempo} \Rightarrow Tiempo = \frac{Volumen}{Caudal}$

Los problemas tipo suelen ser: Problemas de llenados y vaciados de depósitos, estanques, o similares.

Problemas de llenado

Aunque evidentemente pueden existir variaciones tanto en su forma de plantearse así como en las incógnitas buscadas, se suelen plantear de la siguiente manera:

Dos grifos/caños/manantiales A y B vierten agua a un depósito de capacidad *V*. El caudal del grifo A es Q_1 y el del grifo B es Q_2. Calcule el tiempo que tardará en llenarse el depósito.



Ambos grifos verterán al depósito los volúmenes V_1 y V_2 en el mismo tiempo *t*, por lo tanto:

$$Q_1 = \frac{V_1}{t} \Rightarrow V_1 = Q_1 t;\, Q_2 = \frac{V_2}{t} \Rightarrow V_2 = Q_2 t$$

Por otro lado sabemos que volumen del depósito será la suma de los volúmenes arrojados por ambos grifos en el tiempo *t*: $V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = Q_1 t + Q_2 t \Rightarrow V = t(Q_1 + Q_2)$

Por lo que el tiempo que tardarán ambos grifos en llenar completamente el depósito será: $t = \frac{V}{Q_1 + Q_2}$

Otra forma de plantear este problema sería:
Sabiendo que un grifo A tarda en llenar un depósito un tiempo t_1 y que el grifo B tarda en llenarlo un tiempo t_2. Calcule el tiempo que tardarán ambos grifos en llenar el depósito.
En este caso no nos dan los datos de los caudales ni del volumen total del depósito, por tanto:

$$El\ grifo\ A\ llenaría\ el\ depósito\ en\ t_1 \Rightarrow\ En\ una\ unidad\ de\ tiempo\ llenaría\ \frac{1}{t_1}\ del\ depósito$$

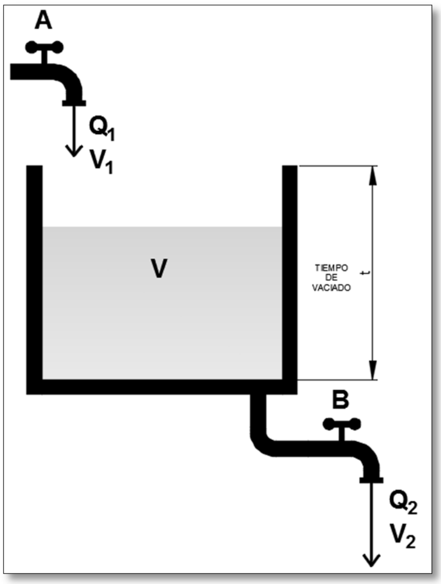
$$El\ grifo\ B\ llenaría\ el\ depósito\ en\ t_2 \Rightarrow\ En\ una\ unidad\ de\ tiempo\ llenaría\ \frac{1}{t_2}\ del\ depósito$$

Si ahora funcionan ambos grifos a la vez, en una unidad de tiempo habrán llenado:

$$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}$$

Problemas de vaciado

Aunque evidentemente pueden existir variaciones tanto en su forma de plantearse así como en las incógnitas buscadas, se suelen plantear de la siguiente manera:
Un depósito contiene un cierto volumen *V* de agua. Se abren simultáneamente un grifo A que vierte constantemente agua con un caudal Q_1 y un desagüe B que saca constantemente agua del depósito con el caudal Q_2. Calcule en cuánto tiempo tardará el depósito en vaciarse.



El grifo A verterá al depósito un cierto volumen V_1 y el desagüe B sacará del depósito un cierto volumen V_2 en el mismo tiempo *t*, por lo tanto:

$$Q_1=\frac{V_1}{t}\Rightarrow V_1=Q_1t;\ Q_2=\frac{V_2}{t}\Rightarrow V_2=Q_2t$$

Por otro lado sabemos que en el instante *t*, cuando el depósito queda vacío, es porque el desagüe B ha vaciado tanto el volumen *V* del depósito como el volumen V_1 vertido por el grifo A, por lo tanto: $V_2=V+V_1\Rightarrow V=V_2-V_1$
$\Rightarrow V=Q_2t-Q_1t\Rightarrow V=t(Q_2-Q_1)$
Por lo que el tiempo que tardarán el grifo y el desagüe en vaciar completamente el depósito será: $t=\frac{V}{Q_2-Q_1}$
Otra forma de plantear este problema sería:
Sabiendo que un grifo A tarda en llenar un depósito un tiempo t_1 y que el desagüe B tarda en vaciarlo un tiempo t_2. Calcule el tiempo que tardarán ambos en vaciar o llenar el depósito (depende de si uno lo vacía o llena más rápido que el otro).
En este caso no nos dan los datos de los caudales ni del volumen total del depósito, por tanto:

$$El\ grifo\ A\ llenaría\ el\ depósito\ en\ t_1 \Rightarrow\ En\ una\ unidad\ de\ tiempo\ llenaría\ \frac{1}{t_1}\ del\ depósito$$

$$El\ desagüe\ B\ vaciaría\ el\ depósito\ en\ t_2 \Rightarrow\ En\ una\ unidad\ de\ tiempo\ vaciaría\ \frac{1}{t_2}\ del\ depósito$$

Si ahora funcionan ambos a la vez, en una unidad de tiempo habrán vaciado o llenado:

$$\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{t_1t_2}{t_2-t_1}$$

FICHA RESUMEN 6
PORCENTAJES Y PROPORCIONALIDAD

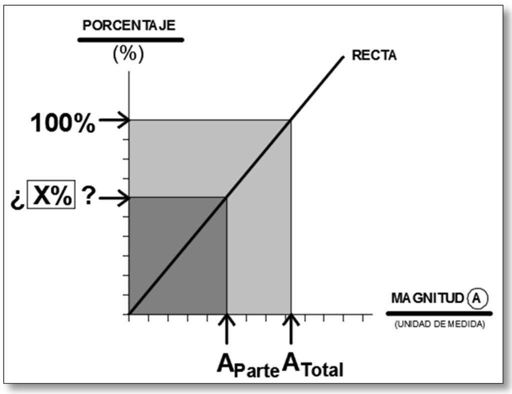
TANTO POR CIENTO DE UNA CANTIDAD

Se expresa de la siguiente manera: $P\%\ de\ C$; Donde *C* es una cantidad cualquiera, y *P* es un número cualquiera.
Además P% representa una fracción cuyo numerador es P y su denominador es 100: $P\% = \frac{P}{100}$
Para calcular el tanto por ciento de una cantidad cualquiera, se expresa el porcentaje en forma decimal y se multiplica por la cantidad: $P\%\ de\ C = \frac{P}{100}C$
Por otro lado debemos conocer que:

$$P\%\ de\ C + (100-P)\%\ de\ C = C \Rightarrow \frac{P}{100}C + \left(\frac{100-P}{100}\right)C = C \Rightarrow 100\%C = C$$

PORCENTAJE CORRESPONDIENTE A UNA PROPORCIÓN

¿Cómo hallar qué tanto por ciento representa una parte de una cierta Magnitud A respecto de un total de esa misma magnitud?



$$\frac{A_{Parte}}{A_{Total}} = \frac{x}{100\%} \Rightarrow x = \frac{A_{Parte}}{A_{Total}}100\%$$

$$k = \frac{100\%}{A_{Total}} = \frac{x}{A_{Parte}} \Rightarrow x = \frac{A_{Parte}}{A_{Total}}100\%; \frac{1}{k} = \frac{A_{Total}}{100\%} = \frac{A_{Parte}}{x} \Rightarrow x = \frac{A_{Parte}}{A_{Total}}100\%$$

AUMENTOS PORCENTUALES

Un enunciado típico sería: La cantidad C_0 ha subido o aumentado un determinado porcentaje *P%* ¿Cuál es la C_f resultante?
La Cantidad Inicial C_0 es el valor al que se le aplica el aumento porcentual *P%* y la Cantidad Final C_f es el valor buscado, entonces:

$$C_f = C_0 + \frac{P}{100}C_0 \Rightarrow C_f = \left(1 + \frac{P}{100}\right)C_0 \Rightarrow C_f = I_V C_0$$

Donde I_V es el índice de Variación, y se expresa en forma de número decimal:

$$\left(1 + \frac{P}{100}\right) = I_V$$

DISMINUCIONES PORCENTUALES

Un enunciado típico sería: La cantidad C_0 ha bajado o disminuido un determinado porcentaje *P%* ¿Cuál es la C_f resultante?
La Cantidad Inicial C_0 es el valor al que se le aplica la disminución porcentual *P%* y la Cantidad Final C_f es el valor buscado, entonces:

$$C_f = C_0 - \frac{P}{100}C_0 \Rightarrow C_f = \left(1 - \frac{P}{100}\right)C_0 \Rightarrow C_f = I_V C_0$$

Donde I_V es el índice de Variación, y se expresa en forma de número decimal:

$$\left(1 - \frac{P}{100}\right) = I_V$$

VARIACIONES PORCENTUALES ENCADENADAS

Un enunciado típico sería: La cantidad C_0 ha sufrido las siguientes variaciones a lo largo de un cierto tiempo: Aumenta o disminuye $P_1\%$, aumenta o disminuye $P_2\%$, aumenta o disminuye $P_3\%,\ldots$, aumenta o disminuye $P_n\%$ ¿Cuál es la C_f resultante?
La Cantidad Inicial C_0 es el valor al que se le aplican las variaciones porcentuales encadenadas $P_1\%, P_2\%, P_3\%,\ldots, P_n\%$, y la Cantidad Final C_f es el valor buscado, entonces:

Primero C_0 aumenta o disminuye P_1%

$$C_{f1} = \left(1 \pm \frac{P_1}{100}\right) C_0$$

Luego C_{f1} aumenta o disminuye P_2%

$$C_{f2} = \left(1 \pm \frac{P_2}{100}\right) C_{f1} \Rightarrow C_{f2} = \left(1 \pm \frac{P_1}{100}\right)\left(1 \pm \frac{P_2}{100}\right) C_0$$

Luego C_{f2} aumenta o disminuye P_3%

$$C_{f3} = \left(1 \pm \frac{P_3}{100}\right) C_{f2} \Rightarrow C_{f3} = \left(1 \pm \frac{P_1}{100}\right)\left(1 \pm \frac{P_2}{100}\right)\left(1 \pm \frac{P_3}{100}\right) C_0$$

. . .

Luego C_{fn-1} aumenta o disminuye P_n%

$$C_f = \left(1 \pm \frac{P_n}{100}\right) C_{fn-1} \Rightarrow C_f = \left(1 \pm \frac{P_1}{100}\right)\left(1 \pm \frac{P_2}{100}\right)\left(1 \pm \frac{P_3}{100}\right) \dots \left(1 \pm \frac{P_n}{100}\right) C_0$$

Por lo tanto:

$$C_f = I_{V1} I_{V2} I_{V3} \dots I_{Vn} C_0$$

Donde I_{Vi} son los índices de Variación correspondientes a cada aumento o disminución porcentual P_i%, y se expresan en forma de números decimales:

$$\left(1 \pm \frac{P_i}{100}\right) = I_{Vi}$$

FICHA RESUMEN 7
APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ECONOMÍA

TÉRMINOS HABITULAES USADOS EN ECONOMÍA

Recordatorio de algunos términos que se usan habitualmente en la aritmética mercantil acompañados de sus unidades de medida más habituales:

NOMBRE	SÍMBOLO	DEFINICIÓN	UNIDADES DE MEDIDA MÁS HABITUALES
CAPITAL	***C***	Es la cantidad monetaria que se deposita o se presta.	€, $, etc.
RÉDITO	***r***	Es el porcentaje anual, trimestral, mensual, etc. de beneficios.	%
TIEMPO	***t***	Es el tiempo que permanece la cantidad monetaria depositada o prestada mientras produce beneficios.	meses, trimestres, años, etc.
INTERÉS	**I**	Es el beneficio total monetario obtenido del capital prestado o depositado.	€, $, etc.

INTERÉS SIMPLE

Es el interés o beneficio que se obtiene de una inversión financiera o de un capital cuando los intereses producidos durante cada período de tiempo que dura la inversión se deben únicamente al capital inicial y que los intereses o beneficios se retiran al vencimiento de cada período.

Por lo tanto, si C_0 es nuestro capital inicial y r el rédito expresado en % anual, los intereses generados por este capital durante t años, suponiendo que cada año retiramos dichos intereses dejando siempre C_0, serán:

$$I = \frac{C_0 r}{100} + \cdots + \frac{C_0 r}{100} \Rightarrow I = \frac{C_0 r t}{100}$$

Suponiendo ahora que cada mes retiramos dichos intereses dejando siempre C_0, éstos serán:

$$El\ rédito\ mensual\ será: \frac{r\%_{anual}}{12} = \frac{r}{1200}, por\ lo\ tanto, I = \frac{C_0 r t}{1200}$$

Suponiendo ahora que cada día retiramos dichos intereses dejando siempre C_0, éstos serán:

$$El\ rédito\ diario\ será: \frac{r\%_{anual}}{360} = \frac{r}{3600}, por\ lo\ tanto, I = \frac{C_0 r t}{3600}$$

INTERÉS COMPUESTO

Representa la acumulación de intereses producidos por un capital inicial a un rédito durante ciertos períodos de modo que los intereses que se obtienen al final de cada período no se retiran sino que se reinvierten o añaden al capital inicial.

Por lo tanto, si C_0 es nuestro capital inicial y r el rédito expresado en % anual, y suponiendo que los intereses generados por este capital durante t años los vamos acumulando sucesivamente al vencimiento de cada año, el capital final C_F obtenido será:

$$1\ año: C_{F1} = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right);\ 2\ años: C_{F2} = C_{F1}\left(1+\frac{r}{100}\right) = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2;\ldots;$$

$$t\ años: C_F = C_{Ft-1}\left(1+\frac{r}{100}\right) = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

Por lo tanto, el capital final ***C_F*** al cabo de ***t*** años tras depositar un capital ***C_0*** al **r% anual**, reinvirtiendo siempre los intereses generados, es:

$$C_F = C_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^t$$

Período de capitalización: Son los instantes de tiempo en los que se añaden los intereses al capital. Lo más común es que sea anual, trimestral, mensual, etc.

Caso de que el período de capitalización sea **mensual**, al cabo de *t meses* tendremos:

$$El\ rédito\ mensual\ será: \frac{r\%_{anual}}{12} = \frac{r}{1200}, por\ lo\ tanto, C_F = C_0\left(1+\frac{r}{1200}\right)^{t\ meses}$$

Caso de que el período de capitalización sea **trimestral**, al cabo de *t trimestres* tendremos:

$$El\ rédito\ trimestral\ será: \frac{r\%_{anual}}{4} = \frac{r}{400}, por\ lo\ tanto, C_F = C_0\left(1+\frac{r}{400}\right)^{t\ trimestres}$$

FICHA RESUMEN 8
LA PROPORCIONALIDAD EN LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

TABLA DE FRECUENCIAS

Recordemos que la elaboración de una tabla de frecuencias es el siguiente paso tras la recogida de datos.

La **distribución o tabla de frecuencias** es una ordenación en forma de tabla de los datos estadísticos, asignando a cada dato su frecuencia correspondiente.

Se entiende por **frecuencia absoluta (*f_i*)** el número de veces que aparece o se repite un determinado valor estadístico.

DATOS ESTADÍSTICOS (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)
x_1	f_1
x_2	f_2
…	…
x_i	f_i
…	…
x_n	f_n
TOTAL	***N***

Recordemos que los **datos estadísticos (x_i)** pueden ser datos aislados o bien pueden ser las marcas de clase de una distribución de datos agrupados en intervalos.

Donde ***N*** es la **frecuencia acumulada**: Es decir, la suma de todas las frecuencias relativas.

$$N = f_1 + f_2 + \cdots + f_i + \cdots + f_n$$

DIAGRAMA DE BARRAS

Este tipo de diagramas se utiliza para representar datos cualitativos o datos cuantitativos de tipo discreto.

Se representan sobre unos ejes de coordenadas: En el eje de abscisas se colocan los valores de la variable y en el eje de ordenadas las frecuencias.

Los datos se representan mediante barras a una altura proporcional a la frecuencia.

Para controlar el tamaño del diagrama, primero nos fijaremos en el dato con mayor frecuencia absoluta y le asignaremos una altura determinada en cm, mm, etc. o cualquier otra unidad de medida de altura. Por ejemplo, supongamos que el dato con mayor frecuencia absoluta es ***f_i***, entonces le asignaremos la altura ***h_i*** que será la altura máxima de nuestro diagrama de barras:

DATOS ESTADÍSTICOS (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	ALTURA (unidad de medida)
x_1	f_1	¿?
x_2	f_2	¿?
…	…	…
x_i	f_i	h_i
…	…	…
x_n	f_n	¿?
TOTAL	***N***	

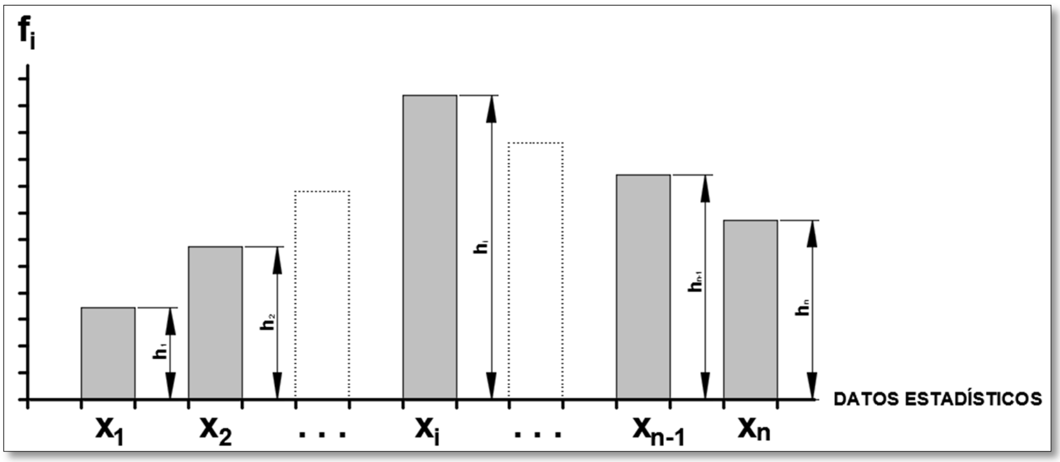
Como la frecuencia y la altura son dos magnitudes directamente proporcionales, a continuación calculamos la **constante de proporcionalidad directa (*k*)** para poder calcular el resto de alturas correspondientes al resto de frecuencias absolutas:

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{h_i}}{\boldsymbol{f_i}} = \frac{h_1}{f_1} = \frac{h_2}{f_2} = \cdots = \frac{h_n}{f_n}$$

Por lo que podremos ir completando la tabla:

DATOS ESTADÍSTICOS (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	ALTURA (unidad de medida)
x_1	f_1	h_1
x_2	f_2	h_2
…	…	…
x_i	f_i	h_i
…	…	…
x_n	f_n	h_n
TOTAL	***N***	

Por último procederemos a dibujar el diagrama de barras con las alturas adecuadas:



POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Usando la metodología descrita anteriormente, podremos representar el polígono de frecuencias.

HISTOGRAMA

Se trata de na representación gráfica de una variable estadística en forma de barras. Se utilizan para variables con un gran número de datos y que se han agrupado en clases.

Cuando los valores de la variable se agrupan en intervalos de la misma amplitud, en un sistema de ejes cartesianos, en el eje de abscisas se dibujan de manera continua (uno al lado del otro) unos rectángulos que tienen por base la amplitud del intervalo (el punto medio de la base corresponderá a la marca de clase), y a continuación se levanta sobre cada intervalo u rectángulo de altura proporcional a la frecuencia absoluta del mismo.

Para dibujar el histograma procederemos análogamente a como lo hicimos en el caso del diagrama de barras:

INTERVALOS (x_i)	MARCAS DE CLASE (c_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	ALTURA (unidad de medida)
$[x_1, x_2)$	c_1	f_1	h_1
$[x_2, x_3)$	c_2	f_2	h_2
…	…	…	…
$[x_{i-1}, x_i)$	c_i	f_i	h_i
…	…	…	…
$[x_{n-1}, x_n)$	c_n	f_n	h_n
	TOTAL	***N***	

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{h_i}}{\boldsymbol{f_i}} = \frac{h_1}{f_1} = \frac{h_2}{f_2} = \cdots = \frac{h_n}{f_n}$$

Para construir el polígono de frecuencias se tomará como referencia la marca de clase que coincide con el punto medio de la base de cada rectángulo.

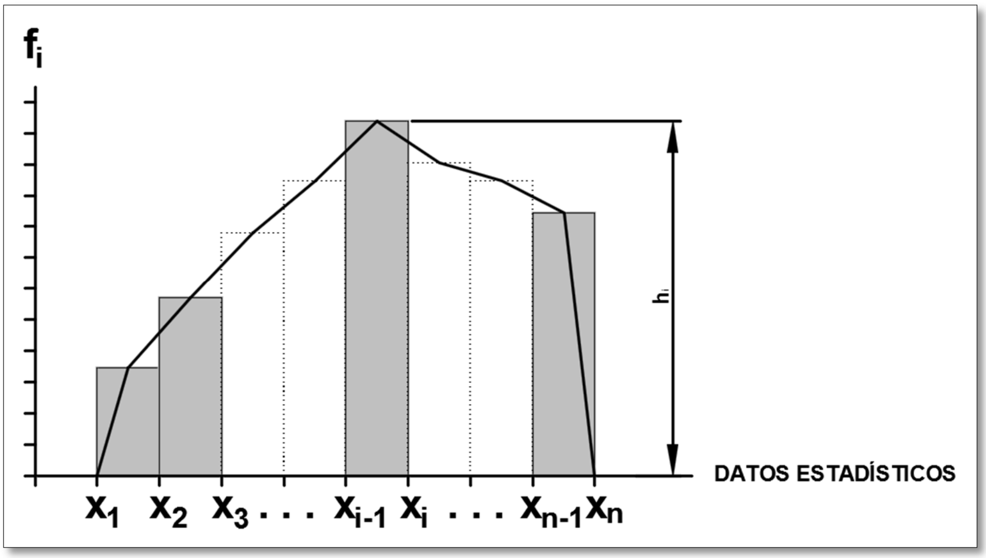


DIAGRAMA DE SECTORES

Se trata de un tipo de diagrama que representa los datos en un círculo dividido en partes o sectores, de modo que el ángulo de cada sector es proporcional a la frecuencia absoluta correspondiente.

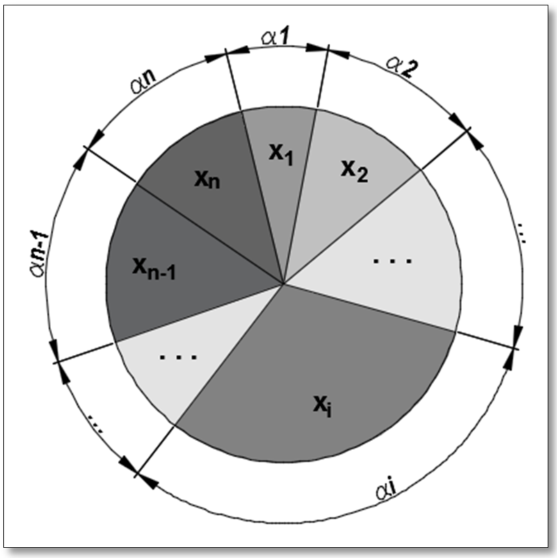
Como sabemos que una circunferencia completa equivale a un total de 360º, y que la frecuencia y el ángulo de cada sector son dos magnitudes directamente proporcionales, podemos calcular la **constante de proporcionalidad directa (*k*)** para poder calcular el resto de ángulos correspondientes a cada frecuencia absoluta:

$$\boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{360^0}}{\boldsymbol{N}} = \frac{\alpha_1}{f_1} = \frac{\alpha_2}{f_2} = \cdots = \frac{\alpha_i}{f_i} = \cdots = \frac{\alpha_n}{f_n}$$

Por lo que podremos ir completando la tabla de la siguiente forma:

DATOS ESTADÍSTICOS (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	ÁNGULO DEL SECTOR
x_1	f_1	α_1
x_2	f_2	α_2
…	…	…
x_i	f_i	α_i
…	…	…
x_n	f_n	α_n
TOTAL	***N***	***360º***

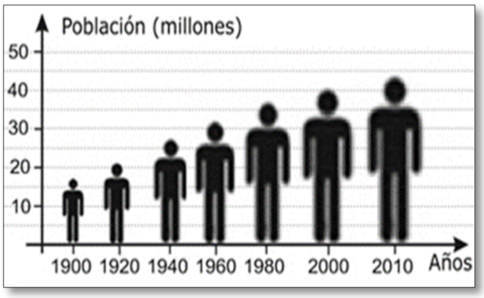
Por último procederemos a dibujar el diagrama de sectores con ayuda de un transportador de ángulos y un compás:

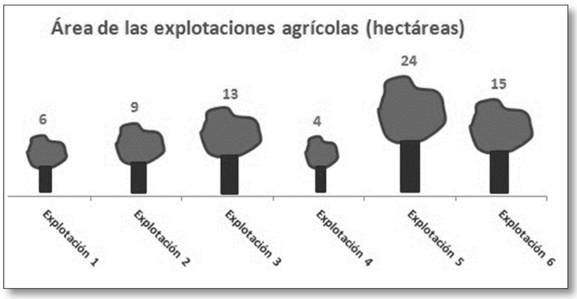


PICTOGRAMAS

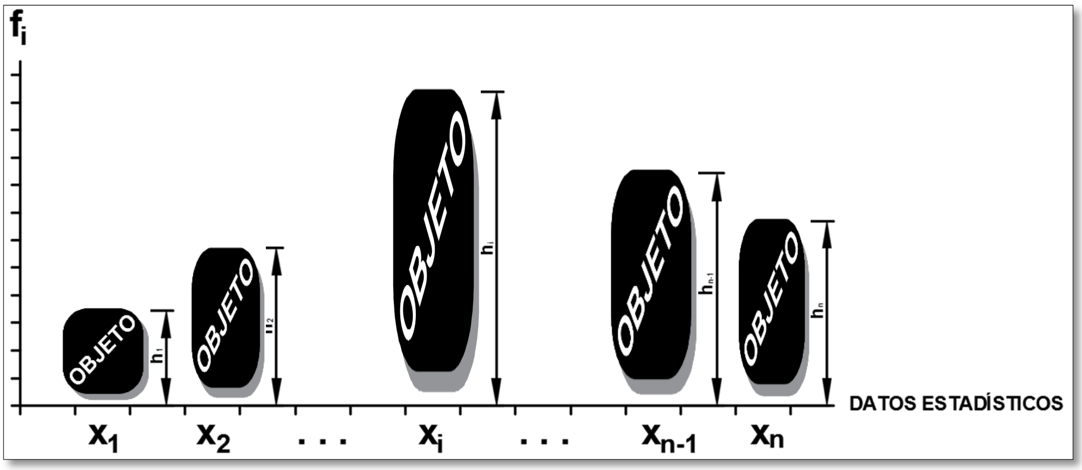
El pictograma es la representación gráfica, mediante el dibujo de un objeto o icono característico, de la estadística de un determinado fenómeno.

Lo más habitual es que la altura o el área del objeto sean directamente proporcionales a la frecuencia. Se presentan algunos ejemplos:





En el caso de pictogramas estadísticos en los que únicamente se modificaría la altura, bastaría con realizar una proporcionalidad directa entre la frecuencia absoluta y la altura del objeto, lo que ya hemos visto anteriormente:



En el caso de pictogramas estadísticos en los que se modificaría el área, bastaría con enmarcar el objeto en un cuadrado imaginario y realizar una proporcionalidad directa entre la frecuencia absoluta y el área de dicho cuadrado, obteniendo así su lado correspondiente, de este modo:

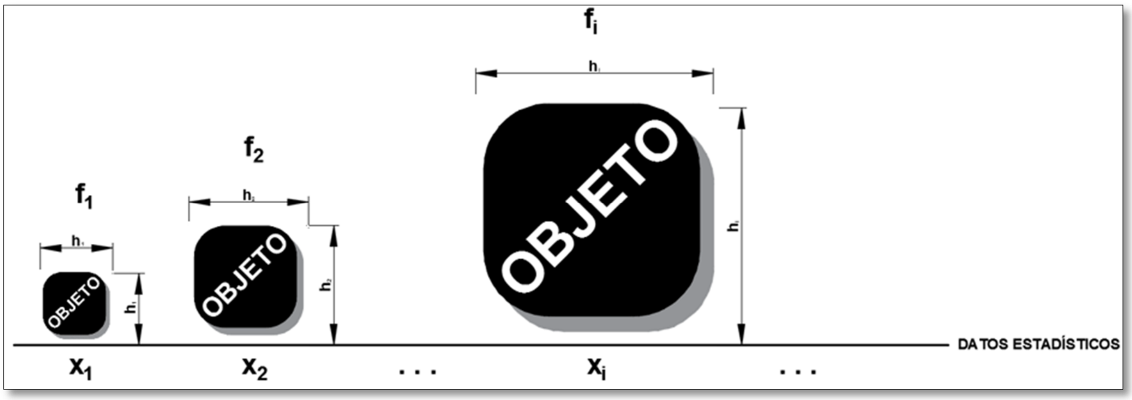
DATOS ESTADÍSTICOS (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	ÁREA DEL OBJETO (unidad de medida)	LADO DEL CUADRADO (unidad de medida)
x_1	f_1	a_1	l_1
x_2	f_2	a_2	l_2
…	…	…	…
x_i	f_i	a_i	l_i
…	…	…	…
x_n	f_n	a_n	l_n
TOTAL	**N**		

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{a_i}}{\boldsymbol{f_i}} = \frac{a_1}{f_1} = \frac{a_2}{f_2} = \cdots = \frac{a_n}{f_n}$$

Y donde la medida de cada lado del cuadrado que envuelve al objeto será:

$$l_i = \sqrt{a_i} = \sqrt{kf_i}$$

De este modo podremos representarlo gráficamente, como por ejemplo, de la siguiente forma:



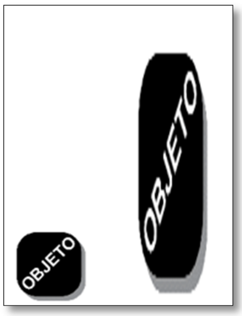
FICHA RESUMEN 9
APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA MEDIDA Y ESTIMACIÓN. LA ESCALA

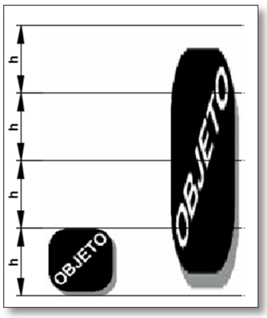
ESTIMACIÓN Y PROPORCIONALIDAD

Aunque la estimación de una proporción puede considerarse una parte esencial de la inferencia estadística. Nos centraremos en este apartado en el uso de la Proporcionalidad para la **estimación de medidas** (longitudes y áreas) a partir de imágenes, gráficos, fotografías o dibujos.

Veamos un ejemplo:

Si el objeto de la izquierda tiene una altura *h*, ¿qué altura tendrá el objeto de la derecha?





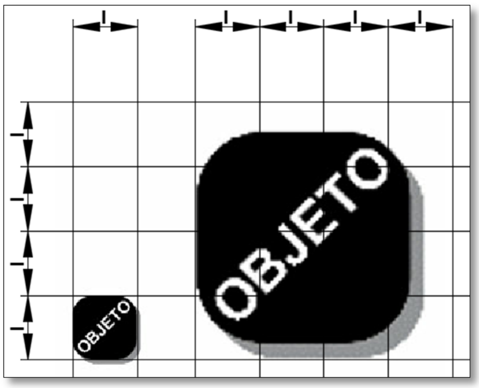
Podemos observar que el objeto de la derecha es aproximadamente 3 veces y media más alto que el objeto de la izquierda, por lo tanto, podemos plantear la siguiente relación de proporcionalidad directa entre ambas alturas:

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{h_{grande}}}{\boldsymbol{h_{pequeña}}} = 3{,}5 \Rightarrow h_{grande} = kh_{pequeña} = 3{,}5h_{pequeña}$$

También podremos **estimar el área** de ciertos objetos: Si se trata de objetos circulares, podremos estimar su área estimando la razón de proporcionalidad entre sus radios o diámetros y en figuras geométricas sencillas, siempre que sean semejantes, estimando la razón de proporcionalidad de uno de sus lados.

Veamos un ejemplo:

Si el objeto de la izquierda es de forma cuadrada de dimensiones l, ¿qué área tendrá el objeto de la derecha?



Podemos observar efectivamente que ambos lados del objeto de la derecha son aproximadamente 3 veces y media más grandes que los del objeto de la izquierda, por lo tanto, podemos plantear la siguiente relación de proporcionalidad directa entre sus respectivas áreas:

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{l_{grande}}}{\boldsymbol{l_{pequeño}}} = 3{,}5 \Rightarrow l_{grande} = kl_{pequeño} = 3{,}5l_{pequeño}$$

$$Área_{grande} = {l_{grande}}^2 = \left(kl_{pequeño}\right)^2 = \left(3{,}5l_{pequeño}\right)^2 \Rightarrow \boldsymbol{Área_{grande}} = \boldsymbol{k^2}\boldsymbol{Área_{pequeña}}$$

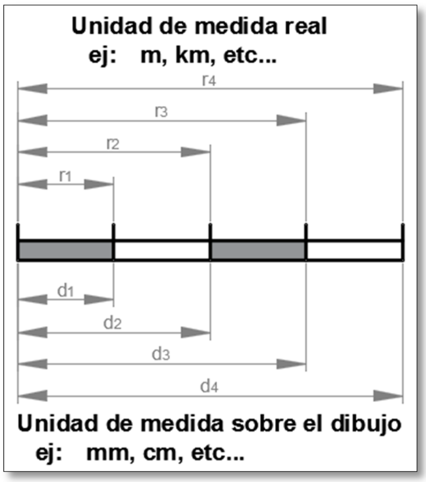
CONCEPTO DE ESCALA

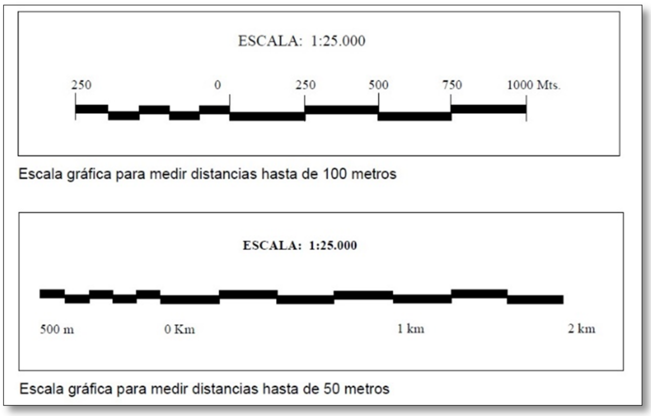
La **escala** es la relación de proporcionalidad o semejanza constante que existe entre cualquier magnitud de medida en un mapa y su medida en la realidad, cualquiera que sea la dirección que se tome endicho mapa.
Se suele expresar numéricamente de la siguiente forma:

$$M_1 : M_2$$

Donde M_1 representa la medida en el mapa o en el dibujo y M_2 la medida en la realidad. Ambas medidas se pueden interpretar con cualquier unidad de distancia (siempre que la unidad de medida sea la misma para ambas) y además se relacionan de forma directamente proporcional, siendo la constante de proporcionalidad directa: $k = \frac{M_2}{M_1}$

La escala también se puede indicar gráficamente, como por ejemplo:



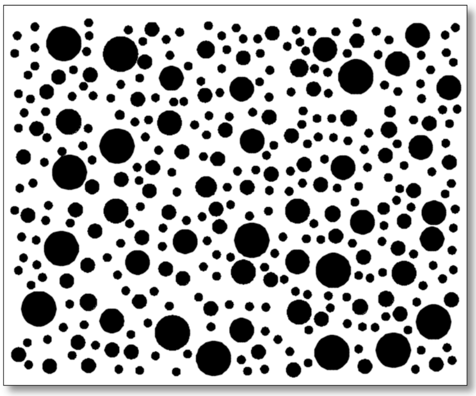


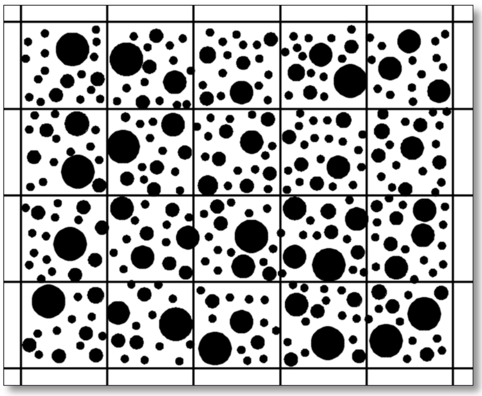
Donde r_i es la distancia o medida real y d_i la distancia o medida en el mapa o en el dibujo. De este modo, y al relacionarse de manera directamente proporcional:

$$k = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \cdots = \frac{r_i}{d_i}$$

ESTIMACIÓN DEL TAMAÑO DE UNA POBLACIÓN POR MUESTREO MEDIANTE LA PROPORCIONALIAD

Supongamos que tenemos la siguiente cantidad de objetos similares distribuidos de forma más o menos homogénea y queremos estimar su número sin tener que contarlos todos.





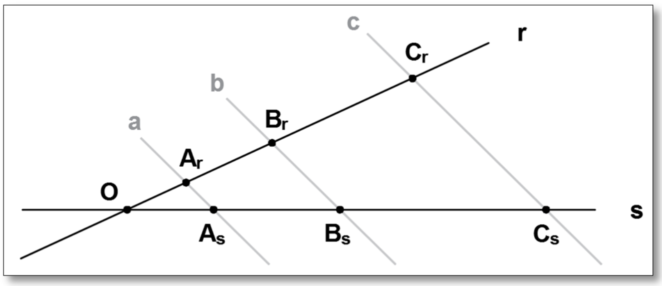
Para estimar el número de objetos sin tener que contarlos todos podríamos dividir el área en cuadrados iguales y bastaría con contar los objetos contenidos dentro de un cuadrado y después multiplicar por el número de cuadrados. De este modo, la constante de proporcionalidad directa k sería:

$$k = \frac{n_{objetos}}{1_{cuadrado}} = \frac{TOTAL_{objetos}}{TOTAL_{cuadrados}} \Rightarrow TOTAL_{objetos} = \frac{n_{objetos}}{1_{cuadrado}} TOTAL_{cuadrados}$$

FICHA RESUMEN 10
APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA GEOMETRÍA

EL TEOREMA DE TALES

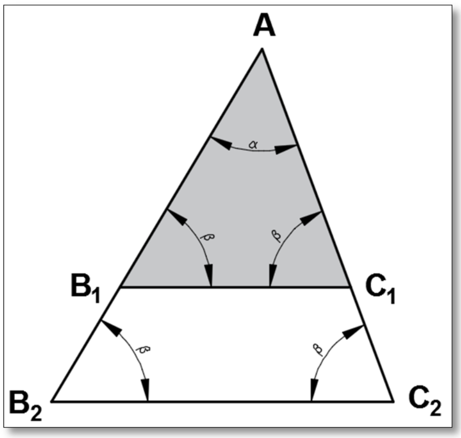
Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos que se forman en una de las rectas son directamente proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra. De este modo:



Por lo tanto, y si las rectas *a, b* y *c* son paralelas, se cumple la siguiente proporcionalidad directa:

$$\frac{\overline{OA_r}}{\overline{OA_s}} = \frac{\overline{A_rB_r}}{\overline{A_sB_s}} = \frac{\overline{B_rC_r}}{\overline{B_sC_s}}$$

Teorema de Tales en los triángulos.



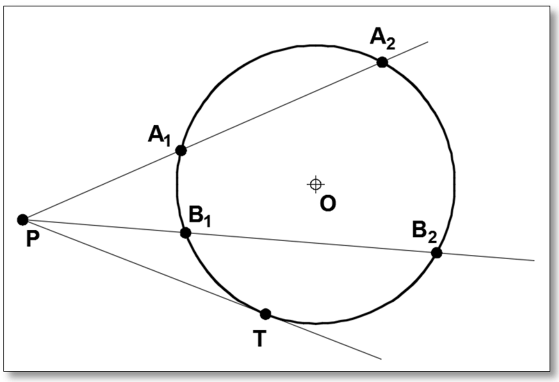
Si dos triángulos semejantes como los que se muestran en la figura, entonces se cumple la siguiente proporcionalidad directa:

$$\frac{\overline{AB_2}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{B_1C_1}}$$

POTENCIA DE UN PUNTO

La potencia es un caso de proporcionalidad inversa.

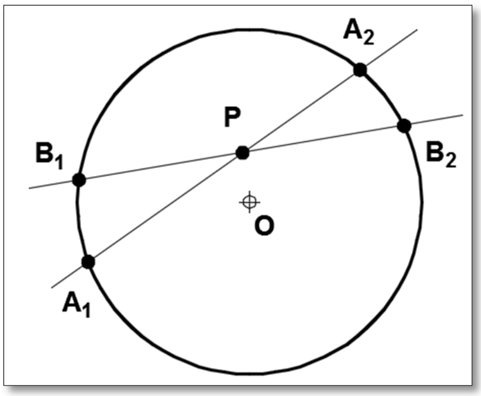
Consideremos un punto *P* y una circunferencia *c*, de centro *O*. Si trazamos rectas secantes a *c* que pasen por *P*, éstas rectas cortarán a *C* en los puntos que se muestran en el dibujo.



Se llama **Potencia del punto *P* respecto de la circunferencia *c*** (*Pot$_{Pc}$*) a la siguiente constante *k* de proporcionalidad inversa:

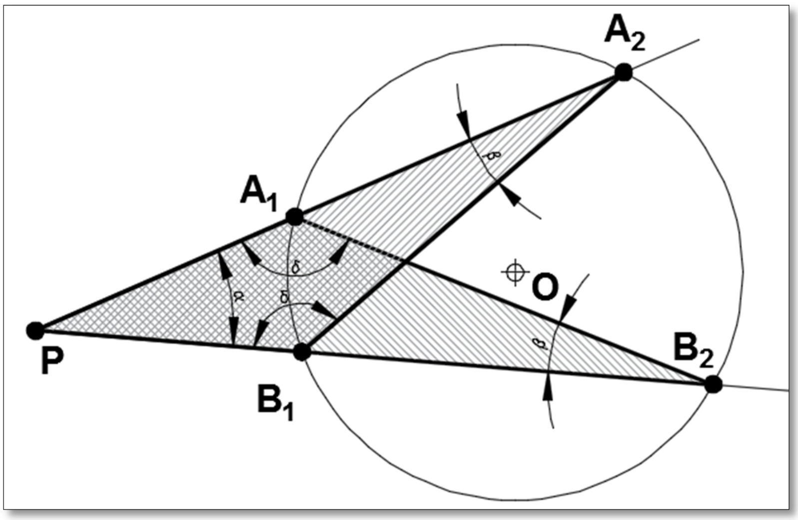
$$k = Pot_{Pc} = \overline{PA_1}\ \overline{A_1A_2} = \overline{PB_1}\ \overline{B_1B_2} = \overline{PT^2}$$

Si el punto *P* es interior a la circunferencia, la potencia será negativa debido a que los segmentos tienen signos contrarios.

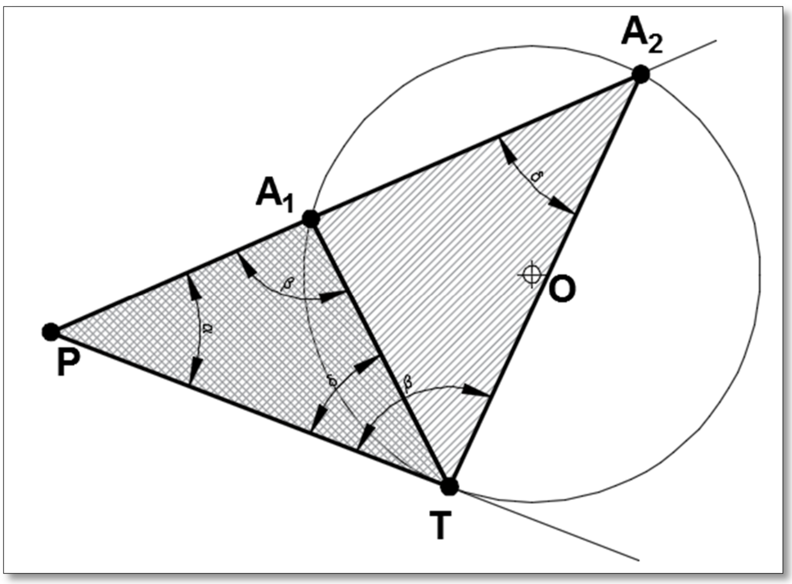


$$-k = -Pot_{Pc} = \overline{PA_1}\ \overline{PA_2} = \overline{PB_1}\ \overline{PB_2}$$

Así mismo, los triángulos PB_1A_2 y PA_1B_2 son semejantes inversos:



En el caso de que tengamos un punto de tangencia, los triángulos PTA_1 y PTA_2 son semejantes inversos:

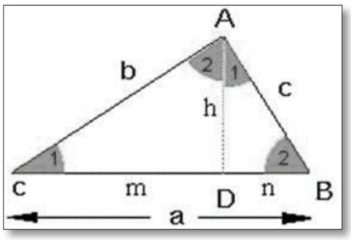


PROPORCIONALIDAD EN EL TEOREMA DE LA ALTURA

El teorema de la altura enuncia que en todo triángulo rectángulo la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos que la divide.

Considerando el siguiente triángulo rectángulo donde *h* es la altura correspondiente a la hipotenusa, *m* la proyección del cateto *AC* sobre la hipotenusa y *n* la proyección del cateto *AB* sobre la hipotenusa. En la figura aparecen tres triángulos rectángulos *ABC, ACH* y *AHB* que son semejantes. Considerando los triángulos semejantes *ACH* y *AHB*, sus lados homólogos son proporcionales:

$$k = \frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$



Considerando los triángulos semejantes *ABC y ADC*, sus lados homólogos son proporcionales:

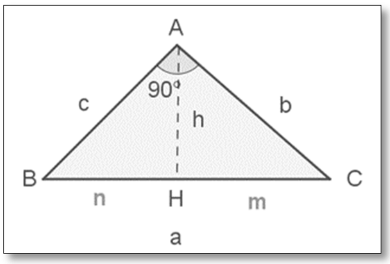
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$$

O bien, si consideramos los triángulos semejantes *ABC y ADB*, sus lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$$

TEOREMA DEL CATETO

En todo triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.



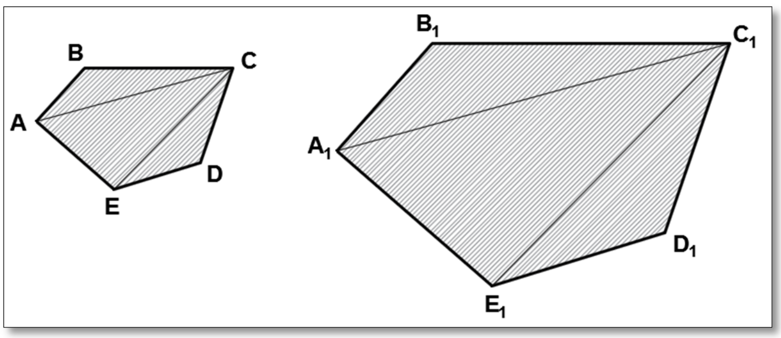
Si a es la hipotenusa, b y c son los catetos, m la proyección del cateto b sobre la hipotenusa y n la proyección del cateto c sobre la hipotenusa se cumple que:

$$k = \frac{a}{b} = \frac{b}{m}\ ;\ b^2 = am$$
$$k = \frac{a}{c} = \frac{c}{n}\ ;\ c^2 = an$$

FICHA RESUMEN 11
ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS PROPORCIONALES

POLÍGONOS SEMEJANTES

Dos polígonos son semejantes cuando se pueden descomponer en triángulos semejantes.

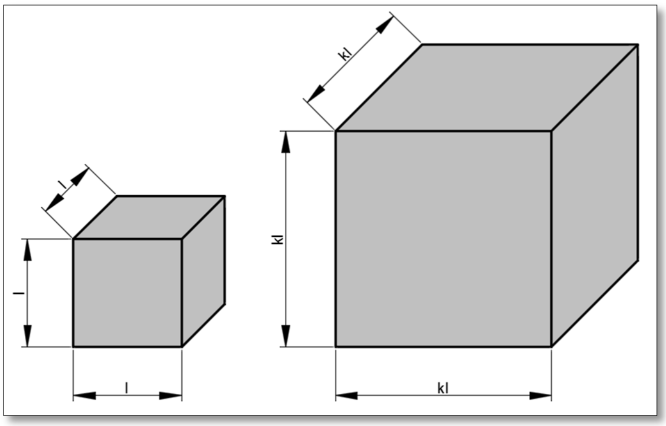


Por lo tanto, teniendo en cuenta la condición para que dos triángulos sean semejantes podemos enunciar que dos polígonos son semejantes si tienen los lados homólogos proporcionales y sus respectivos ángulos iguales. La **razón de semejanza**, denominada *r*, de ambos polígonos será la constante de proporcionalidad entre los lados homólogos.

$$r = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}$$
$$\hat{A} = \hat{A}_1; \hat{B} = \hat{B}_1; \hat{C} = \hat{C}_1; \hat{D} = \hat{D}_1; \hat{E} = \hat{E}_1$$

ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS PROPORCIONALES

Pongamos por ejemplo un cubo de lado *l* y otro proporcional de lado *kl*. De este modo:



	CUBO PEQUEÑO	CUBO GRANDE	RAZÓN DE PROPORCIONALIDAD
ARISTA	l	kl	$\frac{kl}{l} = k$
ÁREA LATERAL	$6l^2$	$6(kl)^2 = 6k^2l^2$	$\frac{6k^2l^2}{6l^2} = k^2$
VOLUMEN	l^3	$(kl)^3 = k^3l^3$	$\frac{k^3l^3}{l^3} = k^3$

De manera general, si la razón de proporcionalidad entre las aristas de dos figuras geométricas semejantes es *k*, entonces la razón entre las áreas es k^2 y entre volúmenes es k^3. De este modo:

$$Arista_{fig1} = kArista_{fig2}$$
$$Área_{fig1} = k^2Área_{fig2}$$
$$Volumen_{fig1} = k^3Volumen_{fig2}$$

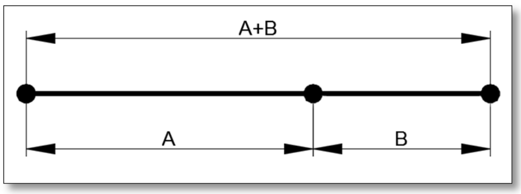
FICHA RESUMEN 12
LA PROPORCIÓN ÁUREA

RAZÓN ÁUREA

Un caso particular de semejanza es la denominada **razón áurea**. Supongamos que un segmento es dividido en dos partes distintas tales que la razón de proporcionalidad entre la parte mayor y la menor es la misma que el total del segmento y la parte mayor.

El número áureo (también llamado número de oro, razón extrema y media, razón áurea, razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción) es un número irracional, representado por la letra griega **φ** (phi) (en minúscula) o **Φ** (Phi) (en mayúscula) en honor al escultor griego Fidias.

El **número áureo o número de oro,** es aquel que define esta proporción especial:



$$\phi = \frac{A+B}{A} = \frac{A}{B}$$

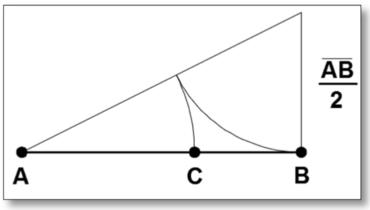
De este modo el valor de ϕ será:

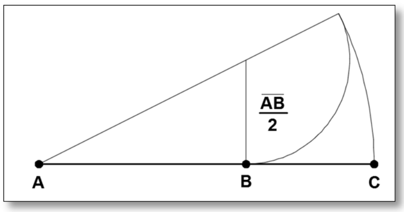
$$AB + B^2 = A^2 \Rightarrow A^2 - BA - B^2 = 0; A = \frac{B \pm \sqrt{B^2+4B^2}}{2} = \frac{B \pm B\sqrt{5}}{2} = B\,\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};\ \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989\ \ldots$$

Se trata por tanto de un número **irracional**, ya que posee infinitas cifras decimales no periódicas al igual que otros números irracionales ya conocidos como **π** y **e**.
El primero en hacer un estudio más formal del número áureo fue Euclides (300 – 265 a. C.), quien también demostró que es un número irracional. Pero antes que Euclides, Platón ya había considerado que los números irracionales eran de particular importancia en la física del cosmos. Fue a partir del s. XVI donde diversos autores estudiaron la importancia y desarrollaron modelos donde se estudiaba el protagonismo de este número.
"La Divina Proporción" es el título de un tratado sobre las propiedades de esta razón y su presencia en los poliedros regulares, debido a Fra Luca Pacioli, con el interés añadido de que la obra estuvo ilustrada por Leonardo da Vinci. En el siglo XIX y principios del XX hubo un interés muy grande por esta proporción.

<u>CONSTRUCCIÓN DE LA SECCIÓN ÁUREA DE UN SEGMENTO Y DE UN SEGMENTO ÁUREO</u>

Sección áurea de un segmento y Segmento áureo





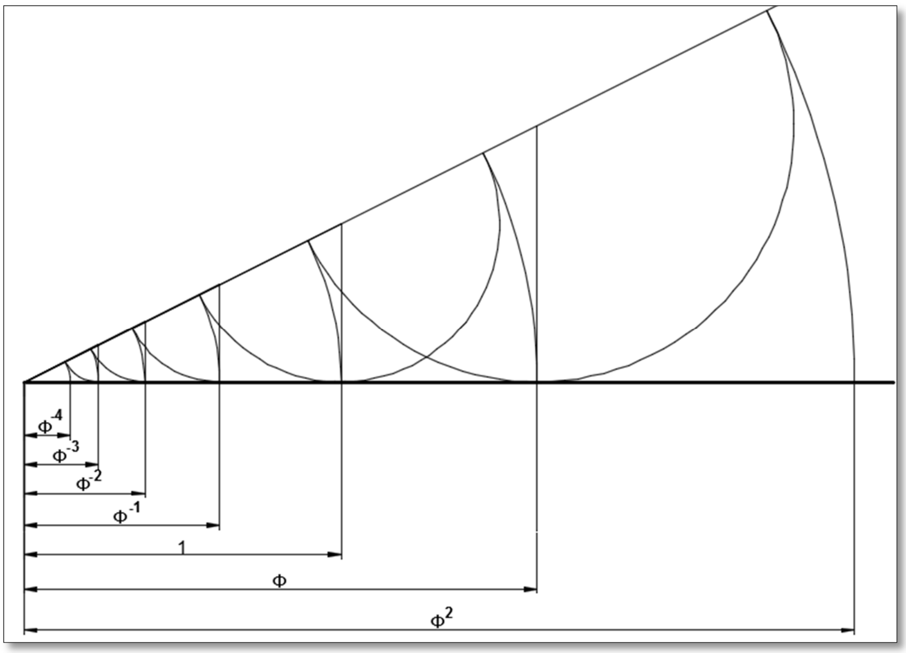
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \phi \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \phi$$

El segmento AC es la sección áurea del segmento AB en el dibujo de la izquierda. En el dibujo de la derecha, el segmento AC representa el segmento áureo a partir del segmento AB.

El aspecto recursivo del número áureo. Las descomposiciones áureas sucesivas de un segmento.

Algunas de las propiedades aritméticas de ϕ son las siguientes: $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$; $\phi^2 = \phi + 1$; etc.

Las potencias del número áureo pueden expresarse en función de una suma de potencias de grados inferiores del mismo número, establecida una verdadera sucesión recurrente de potencias: $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$

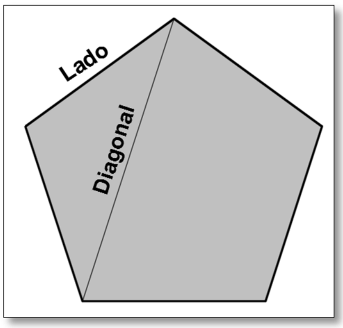


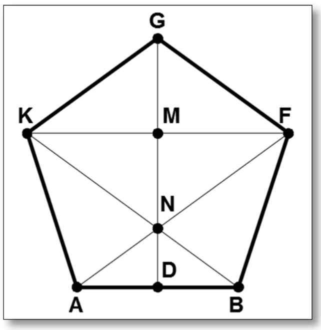
Otra propiedad aritmética del número áureo también es la siguiente:

$$\phi = \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^3} + \cdots + \frac{1}{\phi^n}$$

LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL PENTÁGONO REGULAR

El número áureo es el cociente entre la diagonal y el lado de un pentágono regular: $\phi = \frac{Diagonal}{Lado}$

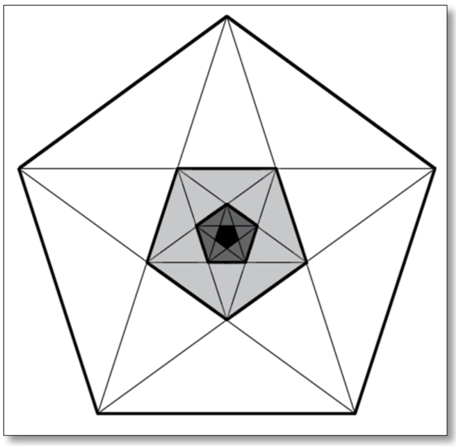


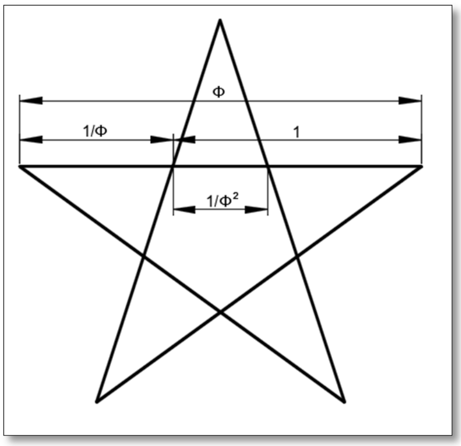


Así mismo también se dan las siguientes relaciones:

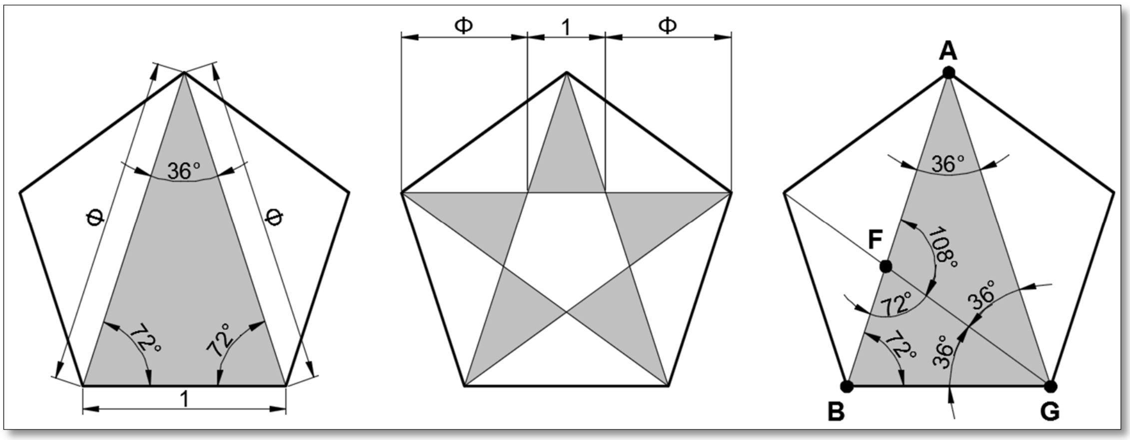
$$\frac{KF}{KG} = \frac{KF}{AB} = \frac{MN}{ND} = \frac{GD}{MD} = \frac{MD}{MG} = \Phi$$

Al trazar todas las diagonales obtenemos una figura denominada **pentáculo o pentagrama pitagórico**, en el que se dan más relaciones áureas, como por ejemplo:





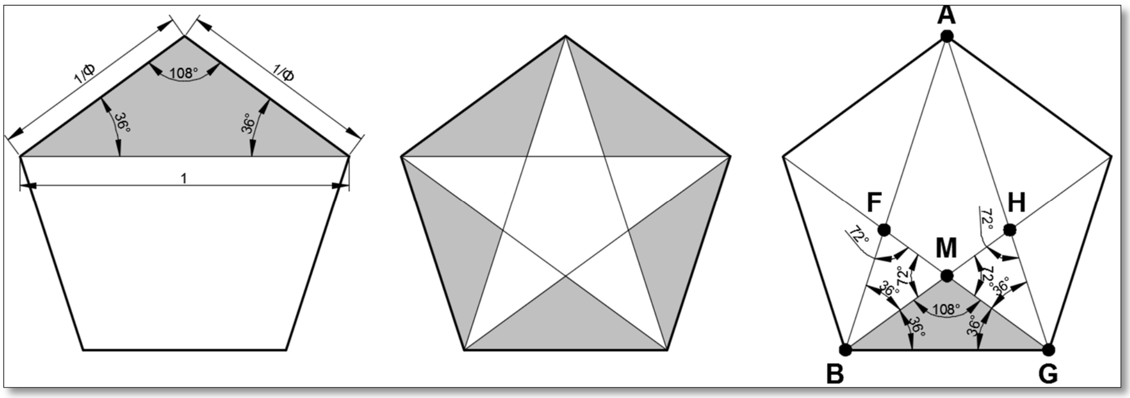
También podemos encontrarnos con los siguientes triángulos:
El **triángulo sublime o triángulo áureo mayor** tiene sus lados en proporción áurea y sus ángulos en razón simple 1:2:2 y aparece en diversas localizaciones tanto en el pentágono como en el decágono como veremos más adelante:



$$FA = FG = GB$$

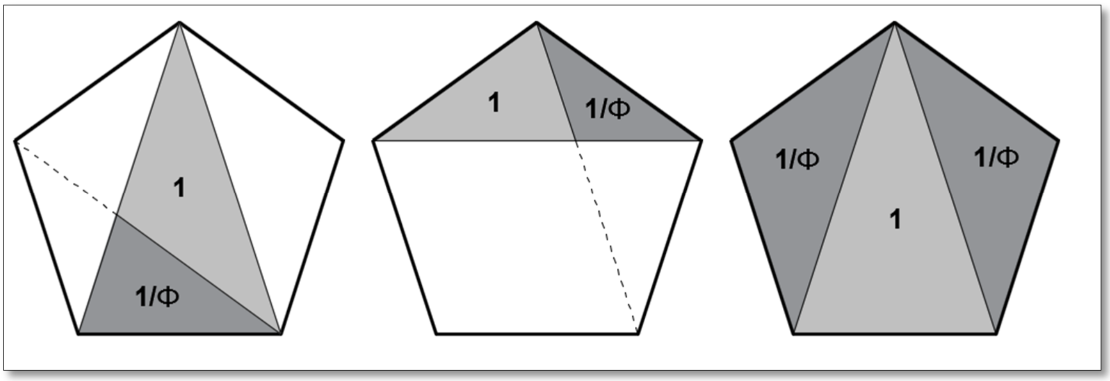
$$\frac{AF}{FB} = \frac{GB}{FB} = \frac{AB}{BG} = \frac{AB}{FG} = \Phi$$

El **triángulo divino o triángulo áureo menor**, también es isósceles y tiene sus lados en proporción áurea, y sus ángulos en razón simple 1:3:3 y aparece en el pentágono:

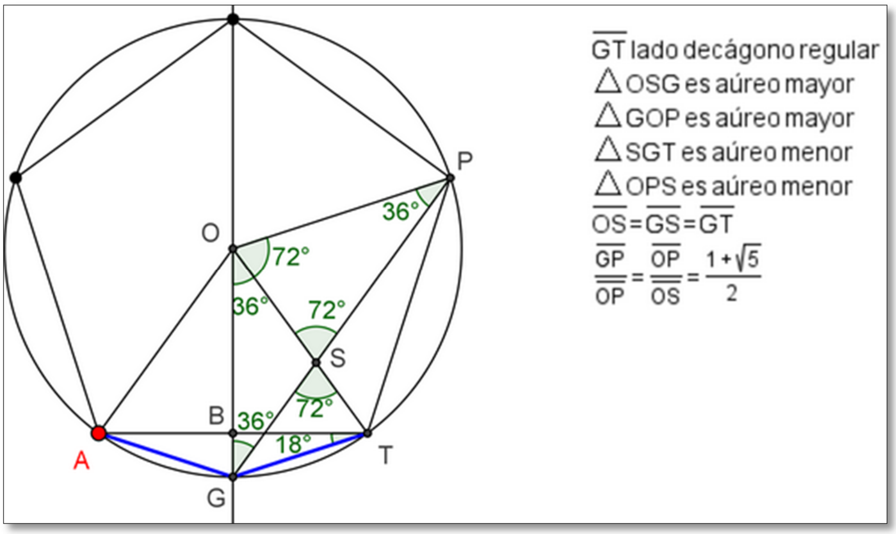


$$\frac{BG}{BM} = \frac{BG}{MG} = \Phi$$

El **área de un pentágono regular** siempre podrá descomponerse en triángulos tipo áureo mayor o áureo menor. Así mismo, si partimos uno de estos triángulos desde un vértice usando el otro, obtendremos que dicha división dará un triángulo de cada tipo. A la inversa, es decir, adosando a uno de ellos su contrario podemos agrandar la superficie del primero. Así mismo, las **superficies de los triángulos así divididos guardan la proporción áurea**. Que a su vez está relacionada con el área del pentágono regular.

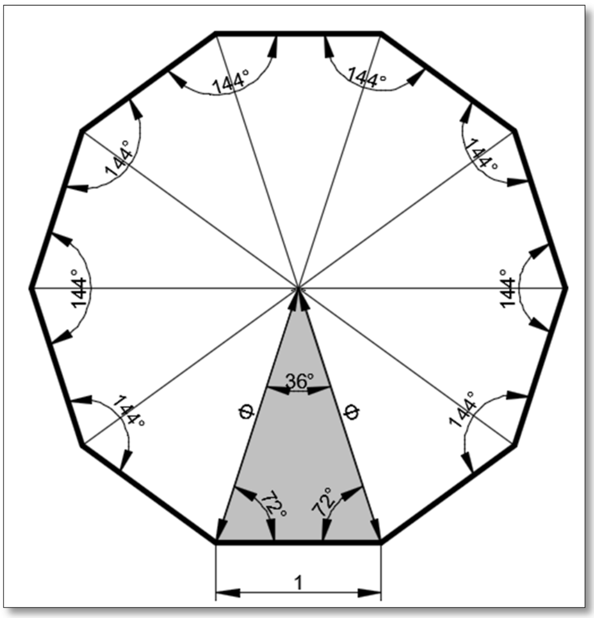


También podemos observar las siguientes relaciones:



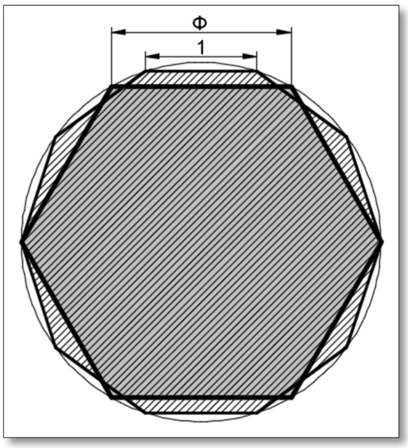
DECÁGONO REGULAR

El **triángulo sublime** o triángulo áureo mayor también está presente en el decágono regular.

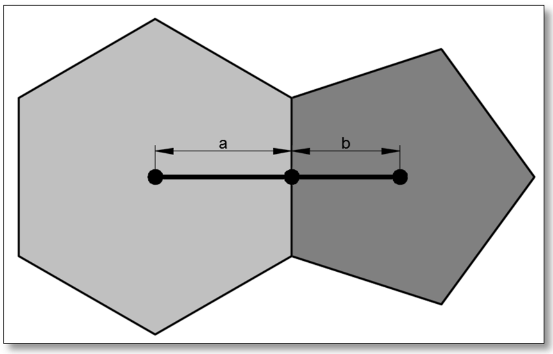


HEXÁGONO REGULAR

Este polígono regular tiene la siguiente propiedad: $\phi = \frac{lado_{hexágono}}{lado_{decágono}}$; La relación entre los lados del hexágono y decágono inscritos en la misma circunferencia es el número áureo.



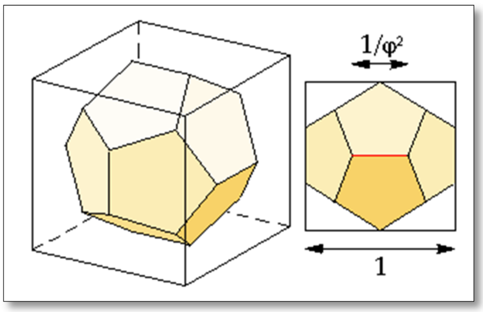
También se da esta importante relación entre las **apotemas** del hexágono y el pentágono:

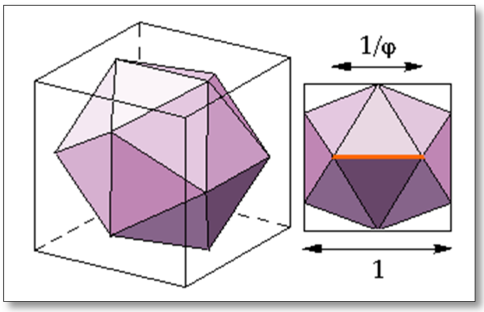


$$\frac{1}{a^2 + b^2} = \phi + 2 = \phi + \sqrt{\mathbf{5}}$$

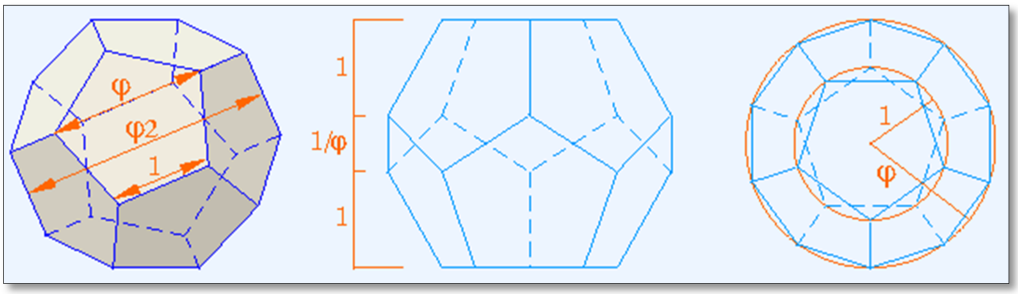
POLIEDROS REGULARES

ϕ También está presente como proporción en el dodecaedro y el icosaedro, los cuales forman parte de los sólidos platónicos. Como el dodecaedro y el icosaedro son las ampliaciones en el espacio del pentágono regular encontraremos también en ellos se encuentra la sección áurea como razón esencial.
En primer lugar encontramos la razón áurea con respecto a las aristas de los cubos en donde se inscriben el dodecaedro y el icosaedro:

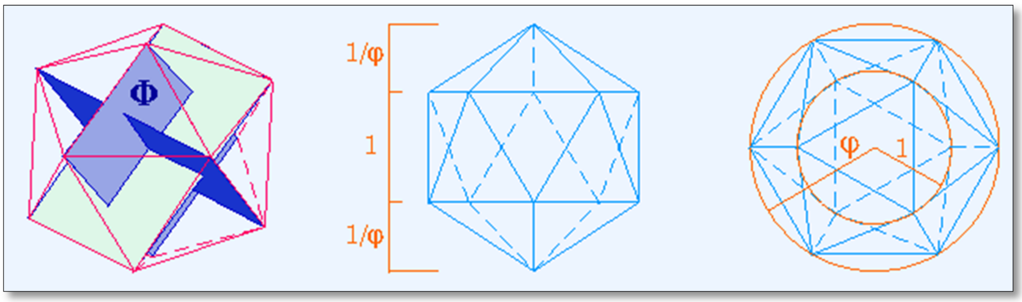




Por ejemplo, en el Dodecaedro, la arista es sección áurea de la diagonal de cara, y ésta lo es de la distancia entre aristas opuestas. Si lo colocamos sobre una cara, las alturas de los vértices intermedios seccionan en sentido alterno la altura total. Visto desde arriba, los radios de las circunferencias que pasan por los vértices de las bases y por los vértices intermedios, están en razón áurea.



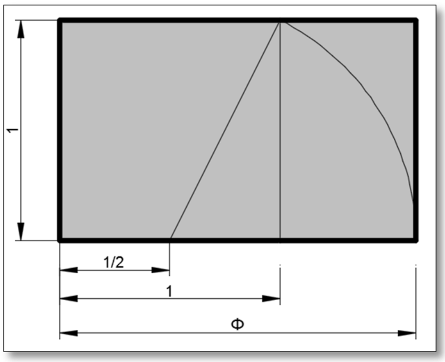
En el Icosaedro podemos inscribir tres rectángulos áureos perpendiculares entre si, lo que significa que la arista es sección áurea de la distancia entre aristas opuestas. Si lo colocamos sobre un vértice, los tramos de las alturas siguen la razón áurea, como también, visto desde arriba sobre una cara, los radios de las circunferencias que pasan por los vértices de las bases y por los vértices intermedios



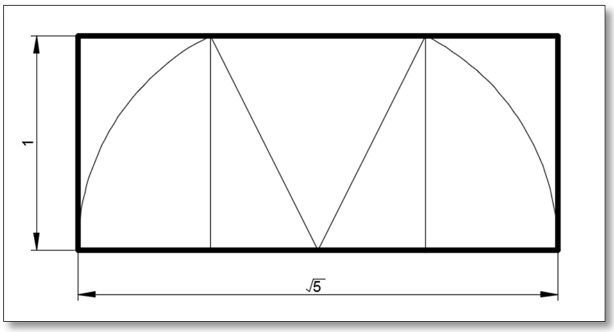
EL RECTÁNGULO ÁUREO

Un rectángulo áureo es aquel que tiene sus lados en proporción áurea.

Rectángulo áureo o rectángulo ϕ y Rectángulo $\sqrt{5}$ o recíproco

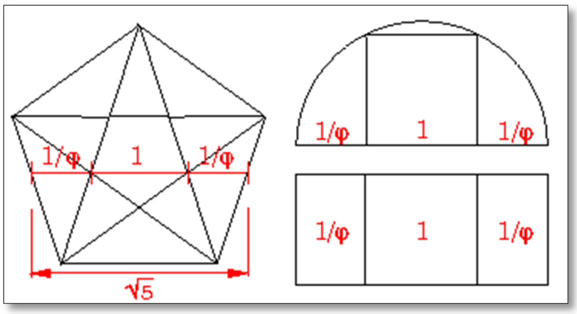


Rectángulo áureo

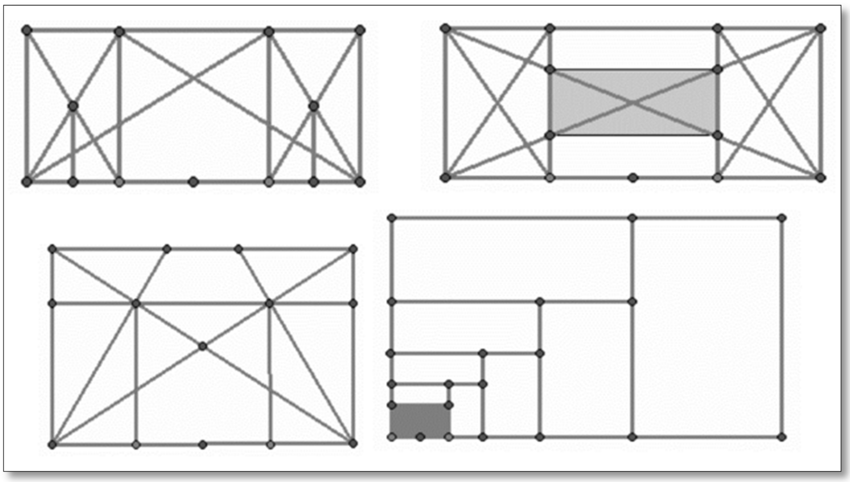


Rectángulo recíproco

La relación del rectángulo recíproco con el pentágono estrellado: marca unas divisiones intermedias que distan de cada lado la sección áurea de la distancia entre ellas. Esta proporción está un poco más escondida en el pentágono estrellado, pero es la misma que guardan el lado de un cuadrado y el diámetro del semicírculo que lo circunscribe, o bien el rectángulo que resulta de construir con él un rectángulo áureo a cada lado.

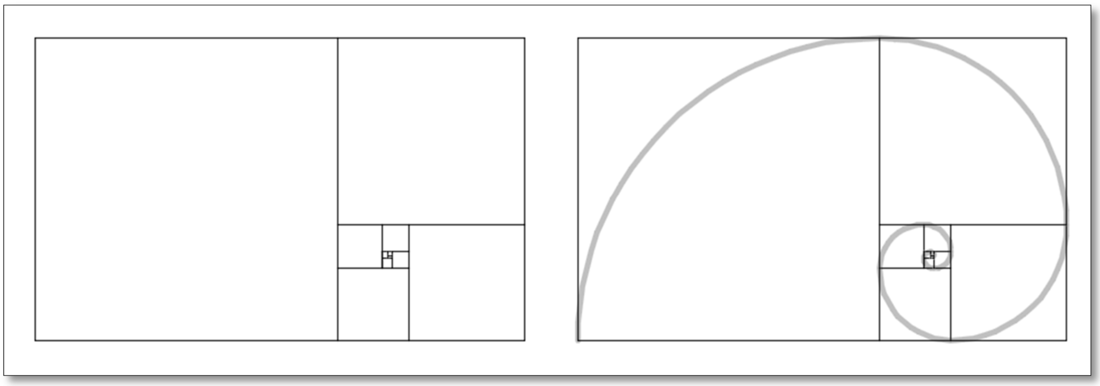


Tanto del rectángulo ϕ como del rectángulo $\sqrt{5}$ podemos obtener **descomposiciones armónicas** más o menos complicadas que, como más tarde veremos, se usarán como modelos de obras arquitectónicas o como trama geométrica sobre la que se estructuran muchos cuadros. Estas descomposiciones armónicas se denominan composiciones áureas rectangulares. Se muestran algunos ejemplos:



LA ESPIRAL ÁUREA

De los dibujos anteriores, deducimos que a cualquier rectángulo áureo se le puede restar por su lado menor o bien añadir por su lado mayor un cuadrado, y el resultado sigue siendo un rectángulo áureo. De este modo obtenemos la espiral áurea:



LA SUCESIÓN DE FIBONACCI Y EL NÚMERO ÁUREO

La **sucesión o serie de Fibonacci** es la siguiente sucesión infinita de números naturales:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610\ldots$$

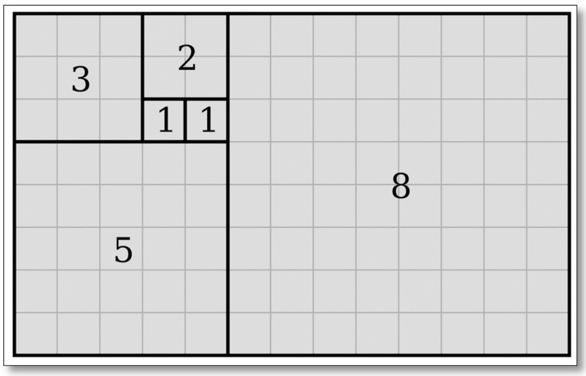
La sucesión comienza con los números 1 y 1, y a partir de estos, cada término es la suma de los dos anteriores. A los elementos de esta sucesión se les llama números de Fibonacci. Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci. Tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos. También aparece en configuraciones biológicas.

Cualquier serie que cumpla la condición de que cada término es la suma de los dos anteriores se le denomina **serie de Fibonacci**.

a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b...;

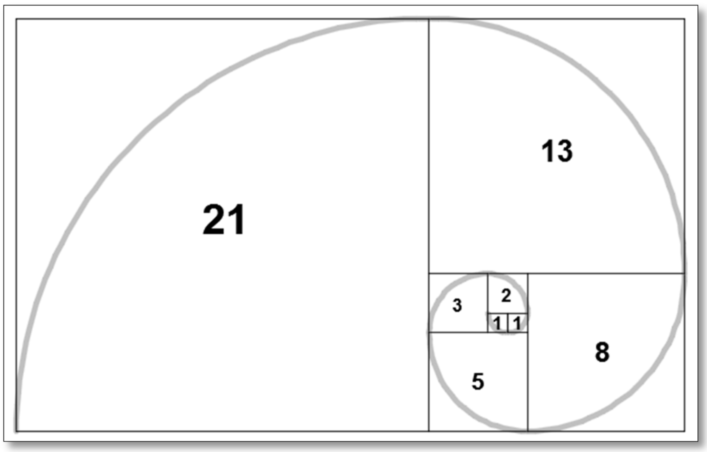
El límite de estas series es la **razón áurea.** Si por ejemplo tomamos dos números cualesquiera como 2 y 6, si iniciamos una serie de Fibonacci con estos dos números, ésta sería 2, 6, 8, 14, 22, 36, … Si observamos la razón entre cada término y el anterior veremos que irá aproximándose a 1,618…

El siguiente rectángulo se ha construido con cuadrados según la serie de Fibonacci cuyos dos primeros términos son 1 y 1. Si consideramos los números de la sucesión de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...y los tomamos de dos en dos 1, 1; 1, 2; 2, 3; 3, 5; 5, 8; 8, 13; ....podemos construir una colección de rectángulos cuyos lados vayan siendo consecutivamente 1 y 1; 1 y 2; 2 y 3; 3 y 5; 5 y 8; 8 y 13; 13 y 21 ; etc. Cada rectángulo de una generación se forma añadiendo un cuadrado al rectángulo de la generación precedente. Cada vez que añadimos más cuadrados conforme avanzamos en la serie, el rectángulo se va aproximando a un rectángulo de proporciones áureas.



La división entre dos números de Fibonacci consecutivos se acerca asintóticamente al número áureo. Por ejemplo si tomamos la serie de Fibonacci desde: 21, 34, 55, 89, 144… tendríamos que la división sería así: $\frac{34}{21}$ =1.69047619, $\frac{55}{34}$ = 1.67647059, $\frac{89}{55}$ = 1.6181818, $\frac{144}{89}$ = 1,617977528, etc. aproximándose esta relación cada vez más a ϕ.

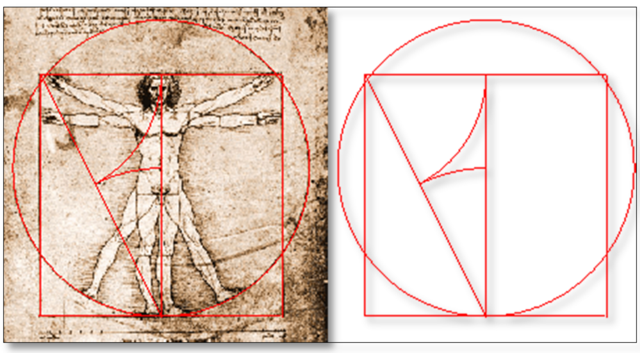
Espiral de Fibonacci
Se genera a partir de los cuadrados anteriores y cada vez que añadimos más cuadrados conforme avanzamos en la serie, el rectángulo se va aproximando a un rectángulo de proporciones áureas.

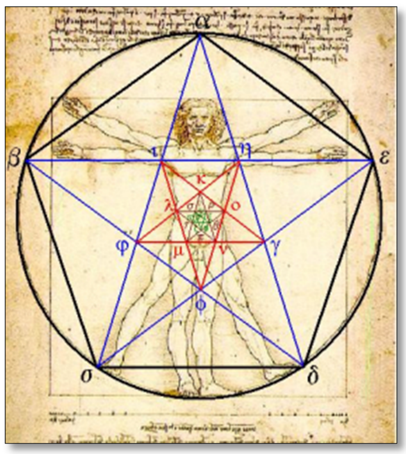


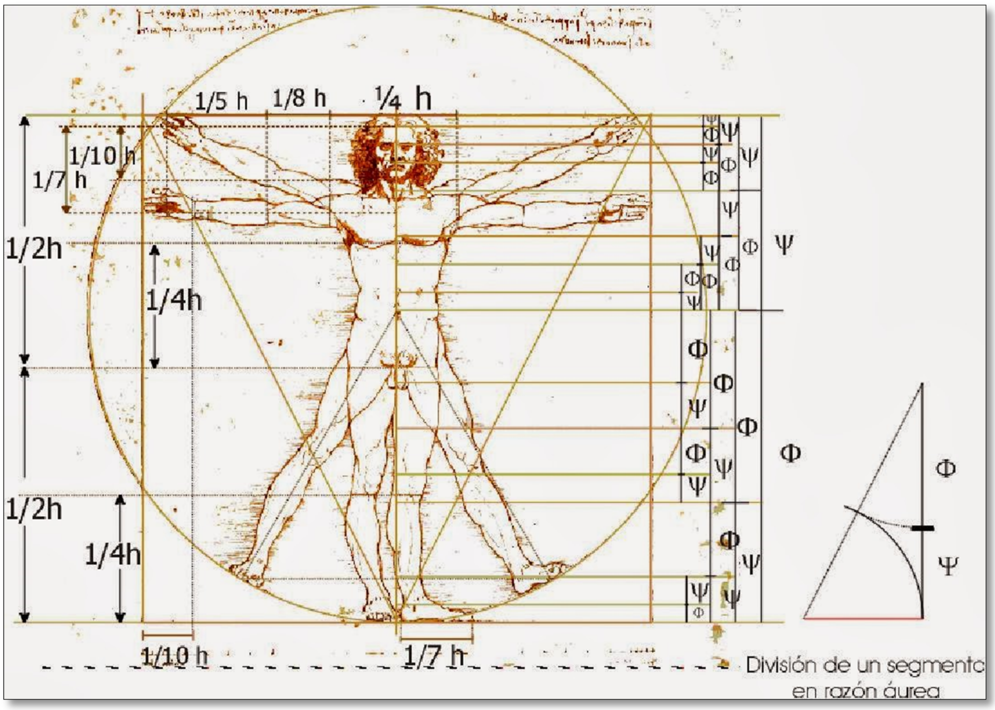
Como veremos más adelante, el número áureo tiene muchas relaciones, aparte de las Matemáticas, con las artes, la arquitectura, los objetos de la vida cotidiana y la naturaleza.

FICHA RESUMEN 14
LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA NATURALEZA

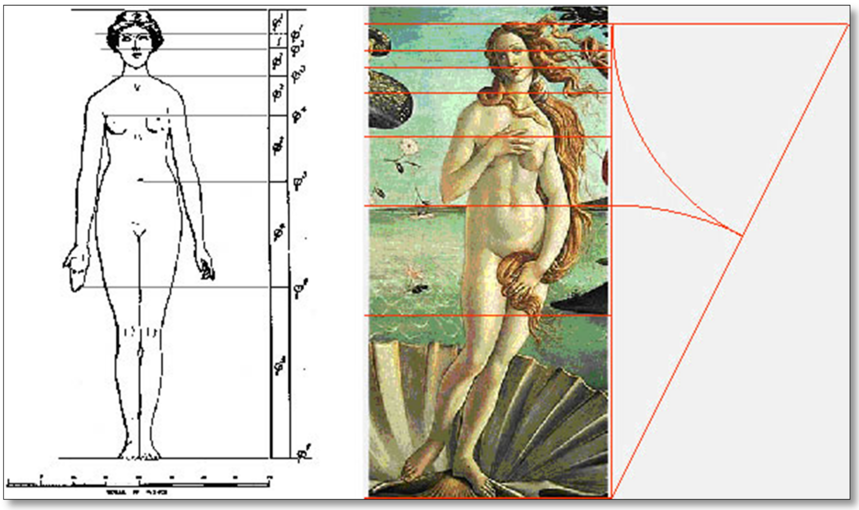
ARMONÍAS HUMANAS
En toda la cultura griega el cuerpo humano fue considerado como el modelo vivo más perfecto de simetría en sus formas, de armonía en todas sus proporciones. Cuatro siglos más tarde **Vitruvio**, comienza su tratado de arquitectura con la recomendación de que los templos, para ser magníficos, se construyan análogos al cuerpo humano bien formado, en el cual, dice, existe una perfecta armonía entre todas las partes.
Entre ellas menciona la altura que, en el hombre bien formado, es igual a la amplitud de sus brazos extendidos. Estas medidas iguales generan un cuadrado que abarca todo el cuerpo, en tanto que las manos y los pies desplazados tocan un círculo centrado en el ombligo. Esta relación del cuerpo humano con el círculo y el cuadrado se asienta en la idea arquetípica de la "cuadratura del círculo", que fascinó a los antiguos, porque esas formas se consideraban perfectas e incluso sagradas.
Cuando el Renacimiento redescubrió la vigencia clásica, **Leonardo** ilustró con su famoso dibujo **"El hombre de Vitruvio"** en el que plasmaba la versión de esta idea expuesta por Vitruvio. En el dibujo se muestra cómo las partes adyacentes de este cuerpo comparten proporciones comprendidas en el rango de la sección áurea y del triángulo pitagórico. Leonardo, como otros maestros del Renacimiento, fue un gran estudioso de las proporciones armoniosas.



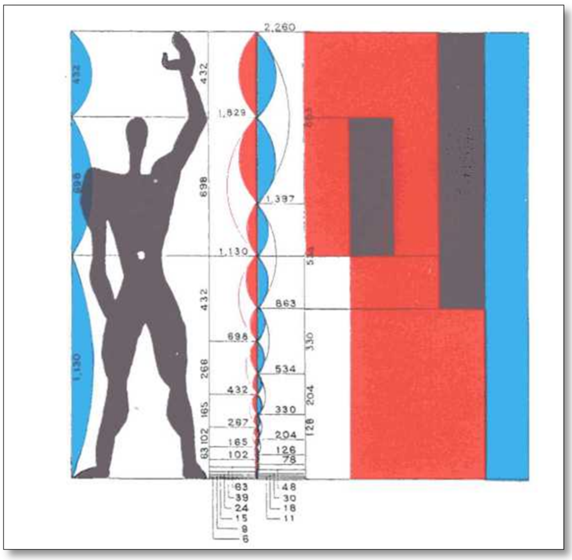


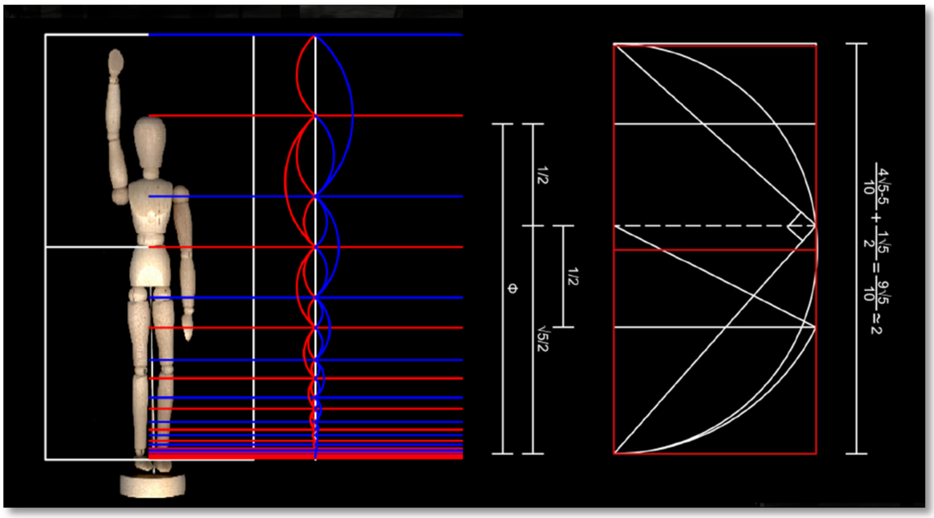


En las obras de muchos otros artistas del Renacimiento se han buscado relaciones áureas sin conclusiones sobre su uso consciente. **Sir Theodore Cook** (s XIX) describió una escala simple de divisiones áureas aplicable a la figura humana, que encaja sorprendentemente bien en las obras de algunos pintores como Botticelli. La división determinada por el ombligo es la manifestación más importante de la sección áurea en el cuerpo humano, aunque se encuentra también en las demás proporciones de las partes del cuerpo.



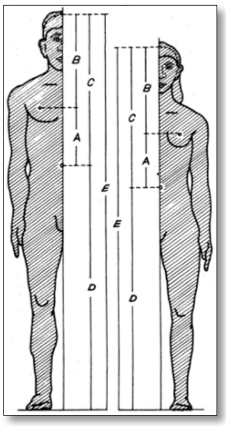
Otro caso notable es el **Modulor de Le Corbusier**. Una escala áurea doble a partir de la altura de un hombre de 1,83 cm convertida en sistema de medidas estándar para la construcción. Charles-Édouard Jeanneret, Le Corbusier (1887-1965), consideró la naturaleza como encarnación de todo lo verdadero, bello, sano y original. Todo lo que llevó a cabo a lo largo de su vida giraba en torno a estos dos conceptos: naturaleza y geometría.
Le Corbusier elabora un sistema de medidas y proporciones cuya validez sería independiente de las diferentes convenciones en uso y que, sin esfuerzo podría trasladarse del sistema métrico a medidas anglosajonas. Este sistema lo llamó Modulor, palabra derivada de "módulo" (es decir, unidad de medida) y "section d´or" (sección de oro o sección áurea). El esquema fundamental del Modulor propone un denominador común de las dimensiones del hombre y de la geometría elemental: un hombre de pie, con el brazo alzado y el ombligo situado justo en medio.
La importancia y papel fundamental que Le Corbusier otorga a la sección áurea viene marcado por la aparición de la obra “Nuevas lecciones acerca de las proporciones del cuerpo humano” de Adolf Zeisig, quien afirmaba que la proporción de la sección áurea servía tanto para regir el macrocosmos como el microcosmos, y por la obra de Matila Ghyka “El Número de Oro”.

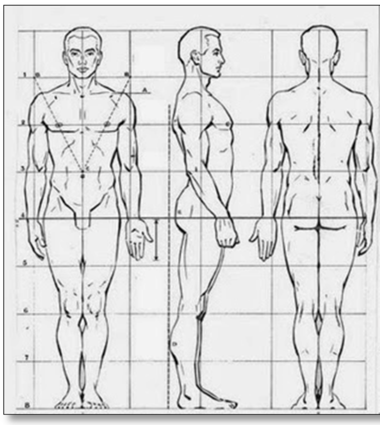


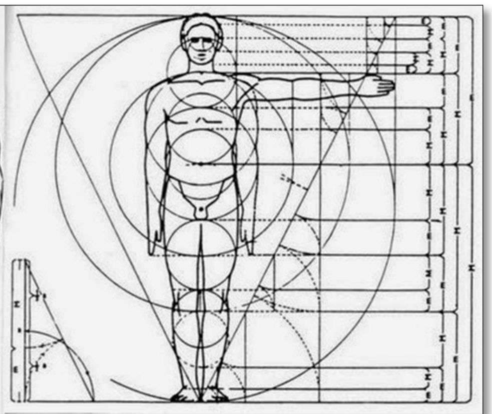


Antropometría áurea

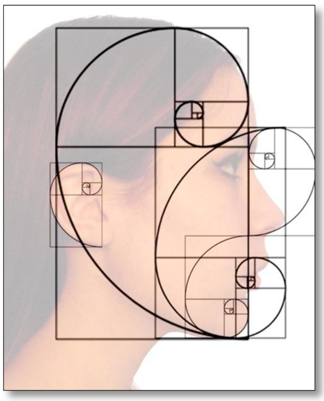
T. Antony Davis, del Indian Statistical Institute (India) y Rudolf Altevogt, del the Zoologisches Institut der Universitat (Alemania) realizaron un estudio donde se medían 207 estudiantes alemanes y 252 jóvenes de Calcuta. Las medidas tomadas fueron A,B,C,D y E. En sus resultados pudieron confirmar que la altura total del cuerpo y la altura desde los pies hasta el ombligo siguen la Razón Aurea (cocientes D/C y E/D). Se obtuvo casi el valor perfecto 1.618 en la muestra alemana (y este valor era válido tanto para chicos como para chicas) y el valor ligeramente diferente 1.615 en la muestra india.

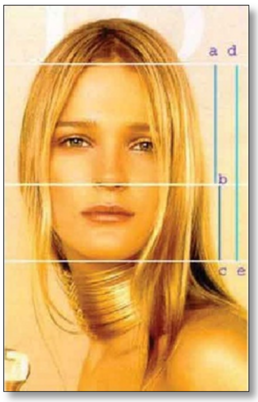


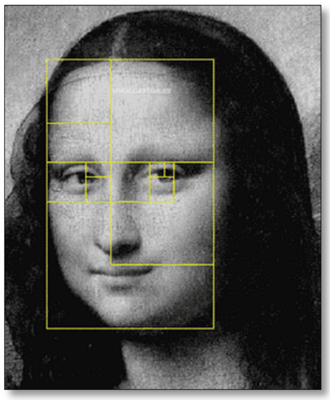




Proporción áurea en el rostro

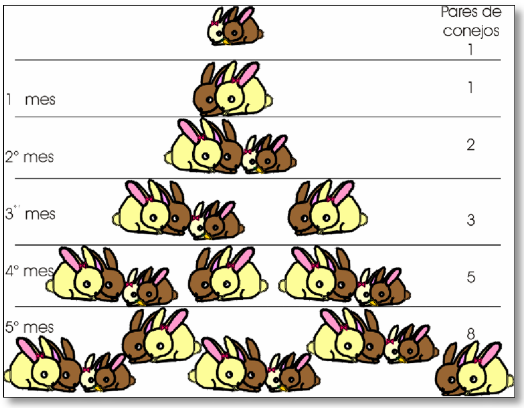


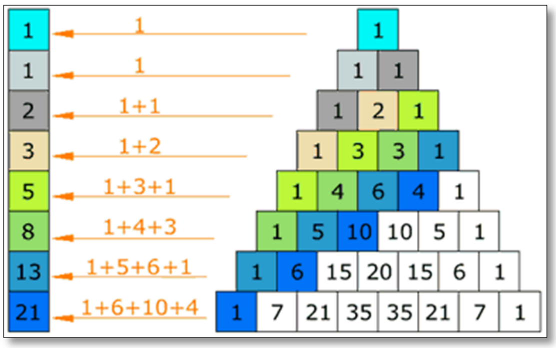




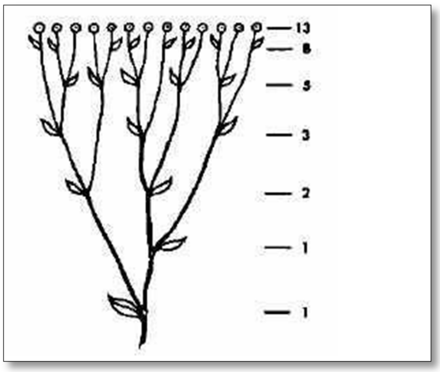
EL NÚMERO ϕ EN LA NATURALEZA

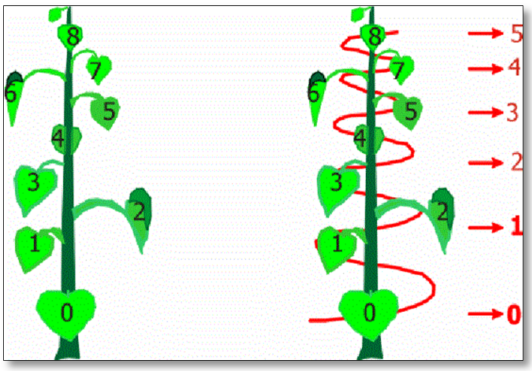
Como hemos visto anteriormente, la **sucesión de Fibonacci** fue descrita por él mismo como la solución a un problema de la cría de conejos: «Cierto hombre tenía una pareja de conejos en un lugar cerrado y deseaba saber cuántos se podrían reproducir en un año a partir de la pareja inicial, teniendo en cuenta que de forma natural tienen una pareja en un mes, y que a partir del segundo se empiezan a reproducir».





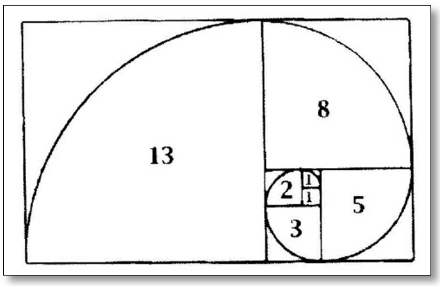
De esta manera Fibonacci presentó la sucesión en su libro Liber Abaci, publicado en 1202. El cual nace de su deseo de poner en orden todo cuánto había aprendido de aritmética y álgebra, y de brindar a sus colegas comerciantes un potente sistema de cálculo, cuyas ventajas él había ya experimentado.
Pero los números de la sucesión de Fibonacci sorprendieron incluso a los biólogos. Como muy bien nos enseña la filotaxia, las ramas y las hojas de las plantas se distribuyen buscando siempre recibir el máximo de luz para cada una de ellas. Por eso ninguna hoja nace justo en la vertical de la anterior. La distribución de las hojas alrededor del tallo de las plantas se produce siguiendo secuencias basadas exclusivamente en los números de la serie de Fibonacci.

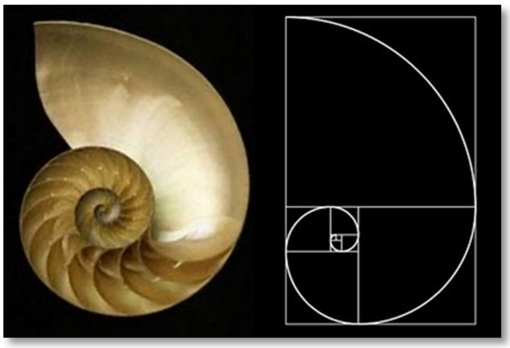




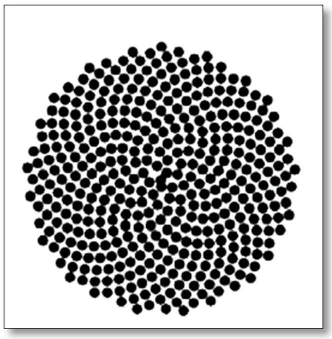
La espiral de Fibonacci en los crecimientos vegetales y animales

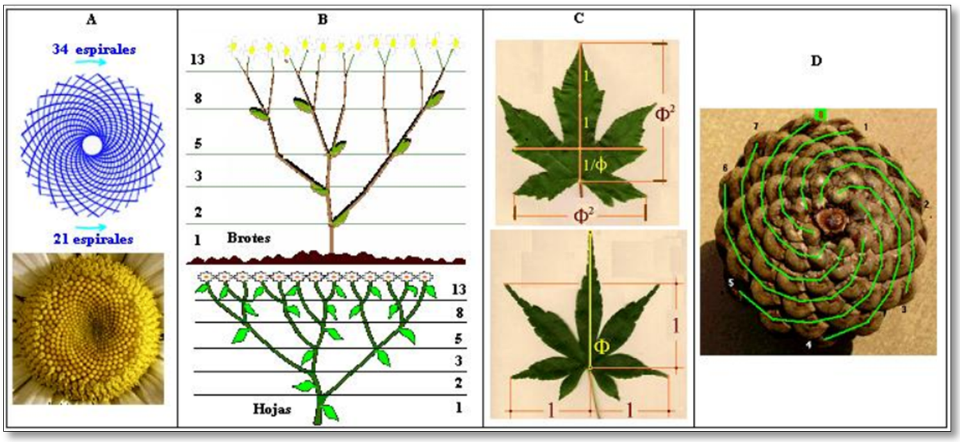
La espiral vinculada a los rectángulos áureos gobierna el crecimiento armónico de muchas formas vegetales (flores y frutos) y animales (conchas de moluscos), aquellas en las que la forma se mantiene invariante, cuyo ejemplo más visualmente representativo es la concha del Nautilus.





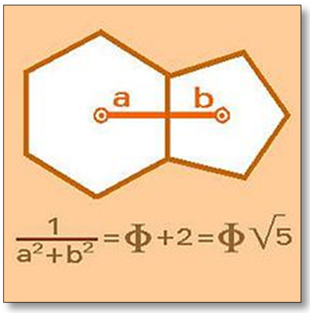
La serie de Fibonacci se puede encontrar en la naturaleza, en la que la flor del girasol, por ejemplo, tiene veintiuna espirales que van en una dirección y treinta y cuatro que van en la otra; ambos son números consecutivos de esta serie. El número de espirales en numerosas flores y frutos también se ajusta a parejas consecutivas de términos de esta sucesión: los girasoles tienen 55 espirales en un sentido y 89 en el otro, o bien 89 y 144. Las margaritas presentan las semillas en forma de 21 y 34 espirales. Y cualquier variedad de piña presenta siempre un número de espirales que coincide con dos términos de la sucesión de los conejos de Fibonacci, 8 y 13; o 5 y 8. Parece que el mundo vegetal tenga programado en sus códigos genéticos del crecimiento los términos de la sucesión de Fibonacci.

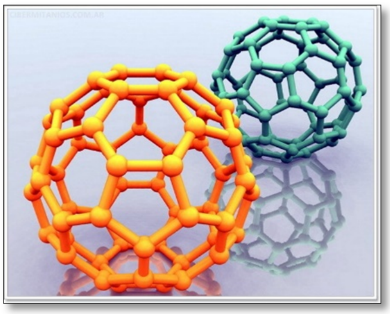




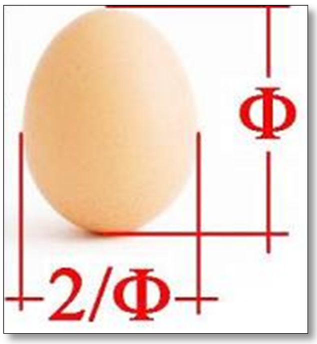
La proporción áurea en otras formas de la naturaleza

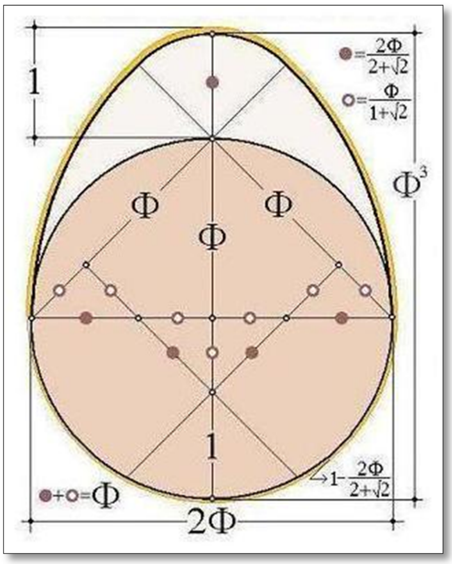
El **fullereno** es la tercera forma molecular más estable del carbono, tras el grafito y el diamante. Su naturaleza y forma se han hecho ampliamente conocidas en la ciencia y en la cultura en general, por sus características físicas, químicas, matemáticas y estéticas.



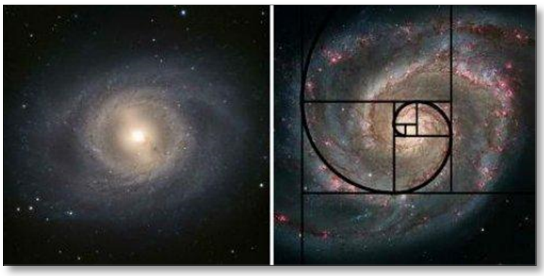


Pues bien, resulta que también son áureos los **huevos** puestos por las gallinas comunes.





Las **galaxias espirales** son discos achatados que tienen una gran población de estrellas, gas, polvo y nubes en los que nacen nuevas estrellas. Una típica galaxia espiral áurea es la del Remolino, en la constelación de Los Lebreles y se trata de una de las más brillantes del firmamento, visible con pequeños telescopios o incluso nuestra propia galaxia, la Vía Láctea, que tienen la propiedad de que en movimiento, sus brazos crecen de una forma determinada. Resulta que este tipo de espirales están relacionadas con el número áureo.



Existen así mismo **innumerables ejemplos** en la naturaleza donde también podemos encontrar la divina proporción.

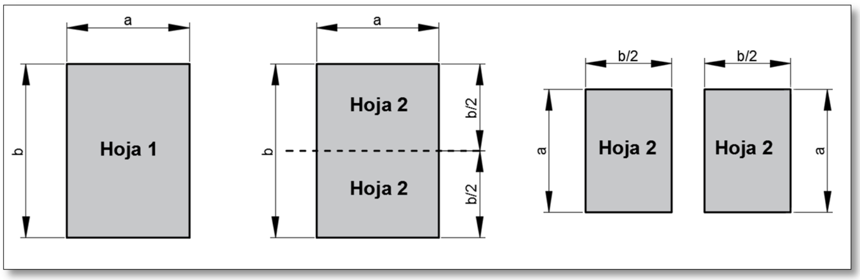
FICHA RESUMEN 13
LA PROPORCIONALIDAD EN LOS OBJETOS Y DISEÑOS DE LA VIDA COTIDIANA

LA PROPORCIONALIDAD EN LAS HOJAS DE PAPEL

Una hoja de papel de tamaño DIN A4 mide 210x297 mm. Ante esta evidencia que todos podemos observar, a un curioso le pueden venir a la mente un par de cuestiones: ¿por qué esas medidas y no otras? ¿qué significa eso de DIN y del número? Los formatos de papel estándar en la mayor parte del mundo se basan en los formatos definidos en el año 1922 en la norma DIN 476 del Deutsches Institut für Normung ("Instituto Alemán de Normalización" en alemán, cuya función es la elaboración de estándares técnicos para la racionalización y el aseguramiento de la calidad), más conocido como DIN. Este estándar fue desarrollado por el ingeniero berlinés Dr. Walter Porstmann y se parece a bocetos olvidados datados en la época de la Revolución Francesa. La norma DIN 476 fue adoptada por la ISO (International Organization for Standardization) mediante la norma ISO 216. Y ésta fue adoptada por la UNE 1011, que es la norma española. Aún así nos seguimos refiriendo a la norma DIN por la fuerza de la costumbre. En general, tan sólo existen diferencias en las tolerancias permitidas. El formato de referencia de la serie A es el A0 (área 0) y abarca una superficie de 1 m^2. Y no sólo eso, sino que la longitud de sus lados mantienen una relación ideal, que se concreta en la proporción $1{:}\sqrt{2}$, redondeando los milímetros.

¿Y por qué la proporción $\mathbf{1}{:}\sqrt{\mathbf{2}}$ en concreto?

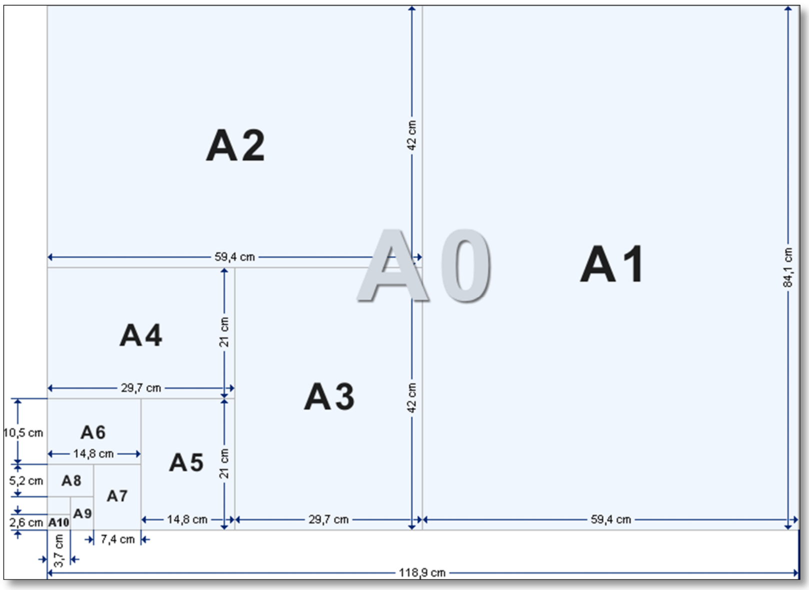
Porque de esta manera, al cortar por la mitad —de su lado más largo— una hoja A0, el lado más corto pasa a convertirse en el lado más largo de la nueva hoja A1. De esta manera, si se corta cualquier hoja de la serie por la mitad de su lado más largo, se obtiene un par de hojas del tamaño siguiente, que siguen manteniendo la proporción ideal entre el largo y el ancho.



Supongamos que la *Hoja 1* mide *a* x *b*. ¿Cuál debe ser la proporción entre *a* y *b* para que al partir la *Hoja 1* por la mitad, la *Hoja 2* resultante tenga esa misma proporción?

$$k = \frac{b}{a} = \frac{a}{\frac{b}{2}} \Rightarrow k = b^2 = 2a^2 \Rightarrow k = \frac{b^2}{a^2} = 2 \Rightarrow k = \frac{b}{a} = \sqrt{\mathbf{2}}$$

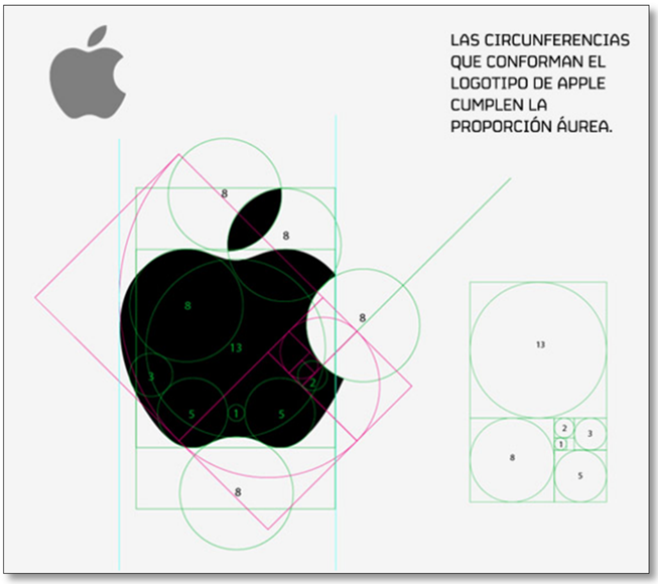
Existen otros formatos de papel normalizados, aunque estén en desuso. El pliego, el folio, la cuartilla y la octavilla, que también mantenían la relación entre tamaños. Es decir, un pliego tiene el tamaño de dos folios, el folio de dos cuartillas y la cuartilla de dos octavillas. De hecho, el nombre de cuartilla y de octavilla hace referencia a que son la cuarta y octava parte de un pliego.

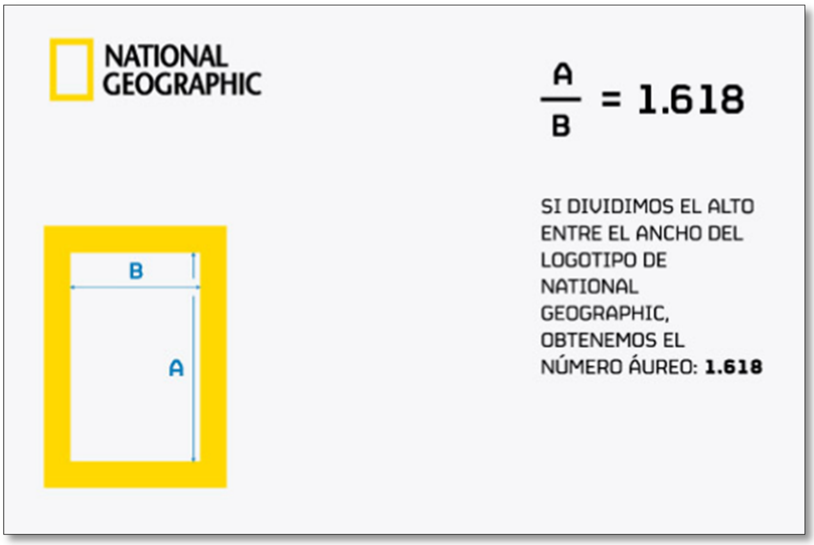


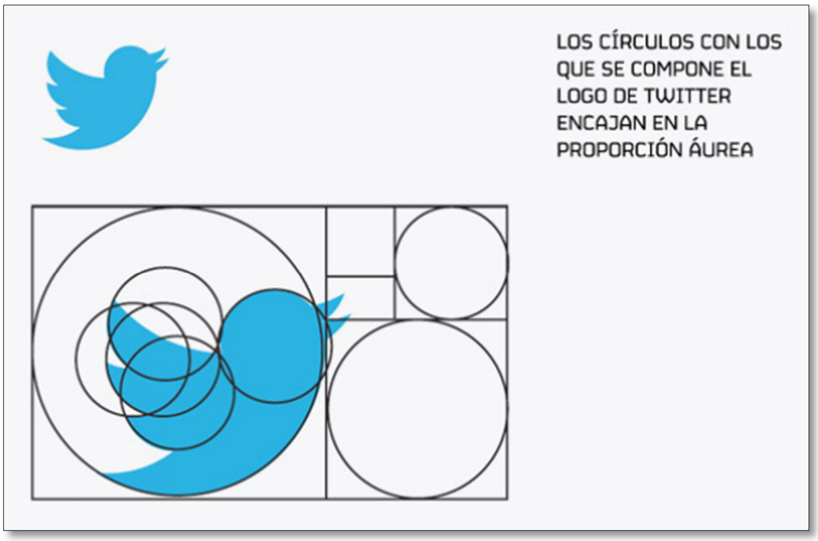
LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LOS OBJETOS Y DISEÑOS DE LA VIDA COTIDIANA

El ejemplo más cercano y curioso en el que encontraremos la proporción áurea es en las tarjetas de crédito. Si dividimos el ancho entre el alto de una tarjeta de crédito obtendremos el **número áureo**: 1,618……

Esta fascinación y mitificación de la proporción áurea continúa viva en nuestros días, y es precisamente en el diseño de logotipos donde encontramos grandes ejemplos de ello. Creyendo que la proporción áurea ayudará a crear diseños estéticamente más agradables, muchos creativos han optado por aplicar esta relación a la construcción de sus logotipos. Veamos algunos ejemplos:

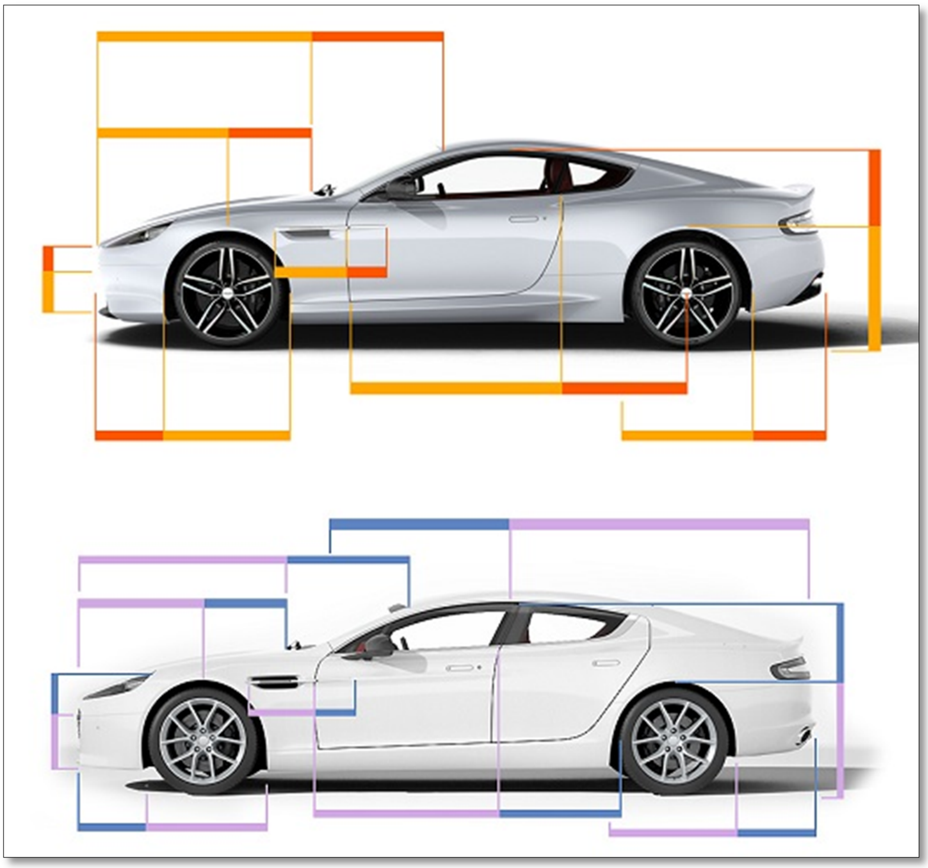






La proporción áurea aparece en cualquier diseño armonioso, de ahí que haya sido utilizado para el diseño de automóviles, logos de marca y hasta en las proporciones de las tarjetas de crédito, con el objetivo de aumentar el atractivo y el deseo de compra.

Expuesto a sus clientes, Aston Martin cita en su web, que la razón áurea se encuentra en el corazón de cada uno de sus modelos. Un rápido vistazo a sus últimos modelos – Rapide S, DB9 y el V8 Vantage – nos certifican que dicha proporción se aplica a cada una de las partes del modelo británico.



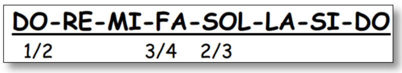
FICHA RESUMEN 15
LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA MÚSICA

LA ARMONÍA PITAGÓRICA EN LA MÚSICA

Las matemáticas y la música se unen en el concepto pitagórico de **armonía**, que significa proporción de las partes de un todo. Los pitagóricos se guiaron siempre en sus investigaciones por el principio de que la música debía ser reconducida hasta las proporciones más simples, ya que debía reflejar en todo la armonía universal.

Pitágoras descubrió la resonancia de una cuerda tensa, y también que los sonidos obtenidos corresponden a las diferentes **fracciones** de la cuerda. En consecuencia, estos hechos se pueden reducir a **relaciones** de números enteros y la armonía tiene un aspecto matemático.

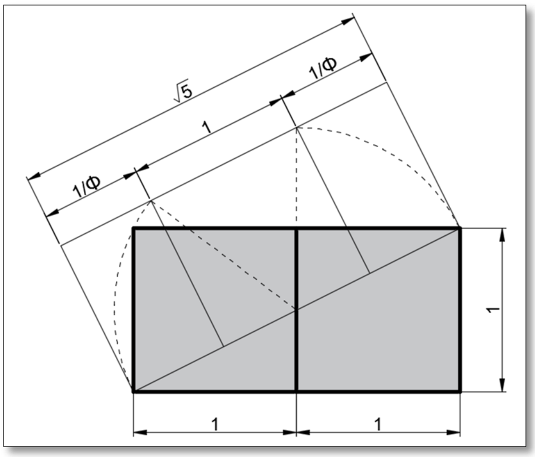
LONGITUD DE LA CUERDA	DENOMINACIÓN ACTUAL	DENOMINACIÓN GRIEGA
Longitud entera	Tono o nota base	**Unísono**
$\frac{1}{2}$ de longitud	Octava (DO-DO)	**Diapasón**
$\frac{2}{3}$ de longitud	Quinta (DO-SOL)	**Diapente**
$\frac{3}{4}$ de longitud	Cuarta (DO-FA)	**Diatéseron**



Platón retomó las ideas de que la materia y el mundo están organizados según estructuras matemáticas producidas explícitamente como análogas a estructuras musicales.

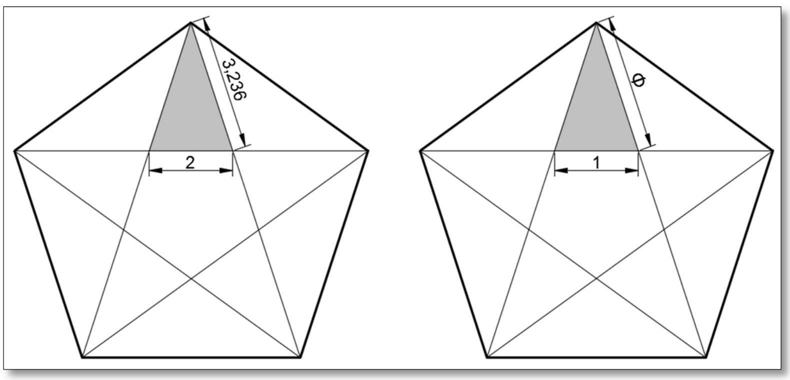
LAS RELACIONES ENTRE EL NÚMERO ÁUREO Y LAS PROPORCIONES MUSICALES

Diapasón: Tiene la proporción $\frac{1}{2} = 0{,}5$ de un rectángulo compuesto por dos cuadrados iguales y una diagonal $\sqrt{5}$. Este rectángulo se denomina recíproco. $\sqrt{5} = 1 + 2(\phi - 1)$



Diapente: La proporción $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$ del diapente es una proporción cercana a la proporción 0,618…;

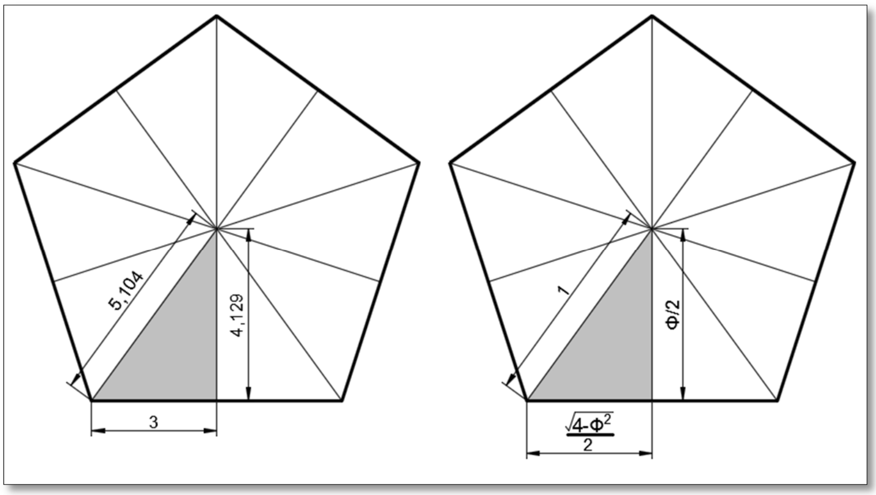
$$\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots \approx \frac{1}{\phi} = 0{,}618\ldots$$



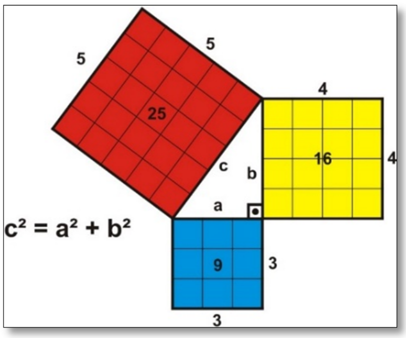
El **diapente** se aproxima a la proporción entre el lado menor y el lado mayor del **triángulo áureo mayor**.

Diatéseron: La proporción $\frac{3}{4} = 0{,}75$ del diatéseron es una proporción cercana a la proporción 0,7268…

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \approx \frac{\frac{\sqrt{4-\phi^2}}{2}}{\frac{\phi}{2}} = \frac{\sqrt{4-\phi^2}}{\phi} = 0{,}7268\ldots$$



El **diatéseron** se aproxima a la proporción entre el cateto menor y el cateto mayor del **triángulo pitagórico** también llamado triángulo 3-4-5.



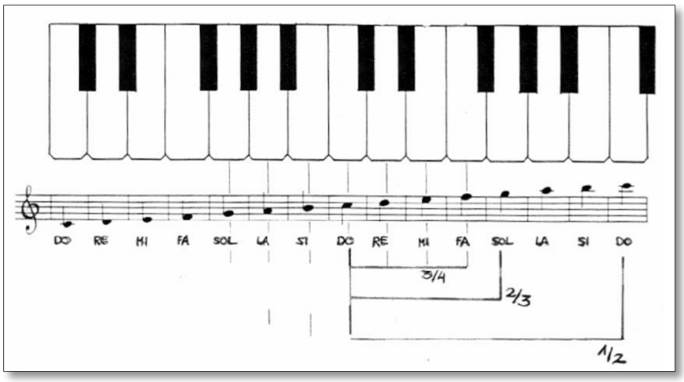
LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LOS INSTRUMENTOS

El piano

El piano es un instrumento de cuerdas vibrantes y percutibles. Si nos fijamos en el teclado de un piano, podremos reconocer sus proporciones armoniosas y áureas:

- 8 Teclas blancas.
- 5 Teclas negras en grupos de 2 y de 3.

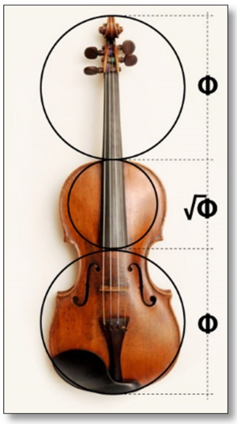
Se trata del comienzo de la serie de Fibonacci: 2, 3, 5, 8. Así mismo podemos reconocer las armonías musicales fundamentales.

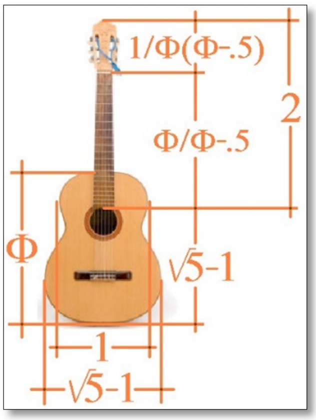


Muchas de las obras pictóricas y arquitectónicas que más tarde veremos basan sus proporciones en relaciones musicales, que a su vez están basadas en relaciones áureas. Conociendo estas relaciones de antemano, se facilita la visión, comprensión y descomposición de estas obras para su estudio.

Instrumentos de cuerda

El número áureo también se encuentra presente en el diseño y forma de muchos instrumentos de cuerda, como por ejemplo:



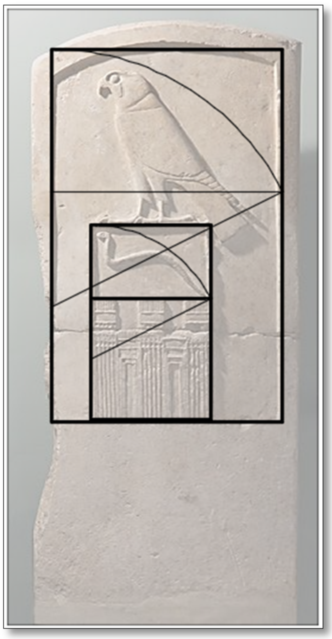


FICHA RESUMEN 16
LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE: PINTURA Y ESCULTURA

ARTE EGIPCIO

Escultura

Ejemplo: Una de las obras de arte más importantes de las dos primeras dinastías, es la **"Eestela del faraón Vadyi"**, el Rey Serpiente. Es un relieve calcáreo procedente de Abydos. Mide 1,45 metros y constituye la parte superior de una alta estela que adornaba la puerta del cenotafio de este rey. El rectángulo en que ondea la serpiente está en relación áurea con el cuadrado constituido por el edificio.

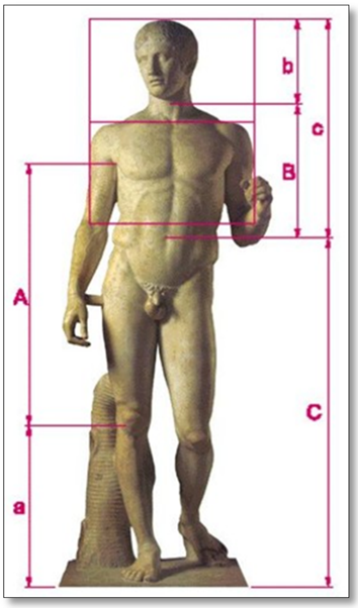


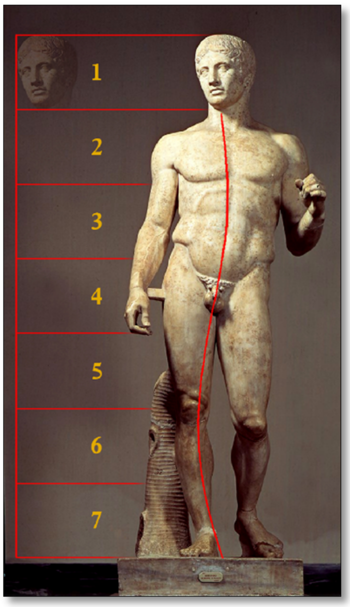
ARTE CLÁSICO GRIEGO

Escultura

Se otorga en la escultura griega la absoluta primacía a la representación del cuerpo humano. En éste, la belleza se consigue tanto por la perfección formal como por la armonía de sus proporciones, basada en la correspondencia de sus diversas partes. Policleto (s.V a.C.), a quien se atribuye la autoría de un célebre tratado sobre las proporciones del cuerpo humano, actualmente perdido, encontramos por vez primera el concepto de belleza basada en el idealismo de proporciones del cuerpo humano.

Ejemplo: En el **"Doríforo"** de Policleto, las proporciones de esta escultura se muestran en una serie de segmentos áureos. Así mismo, la cabeza se toma como unidad de medida proporcional de la altura del cuerpo. En este caso su estatura equivale a 7 cabezas.



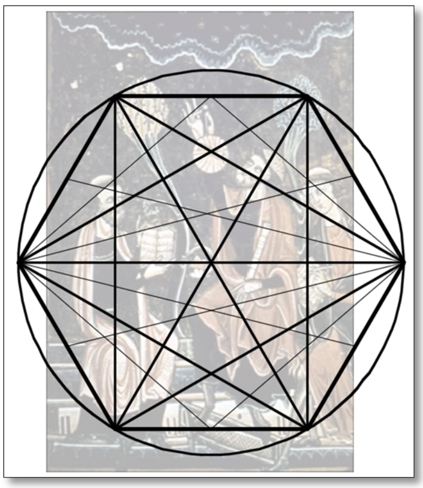


$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\Phi$$

ARTE GÓTICO

Pintura

Ejemplo: El **"Salterio de la Capilla Santa"** es un libro que se sitúa a principios del S. XIII. Recoge obras representativas del arte gótico como **"El astrónomo y el calculista"**. Se puede observar que la escena se enmarca dentro de un rectángulo áureo. Además, se emplea sistemáticamente una traza geométrica, basada en polígonos regulares como el hexágono y esquemas simples sobre la que se sitúan los sucesos. Esta misma estructura se repite en la mayoría de las imágenes del libro.

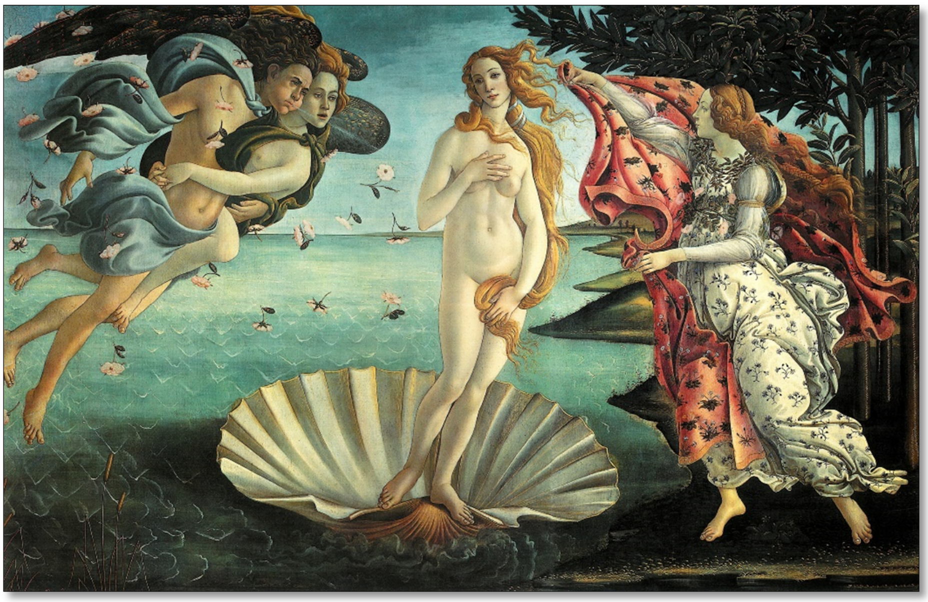


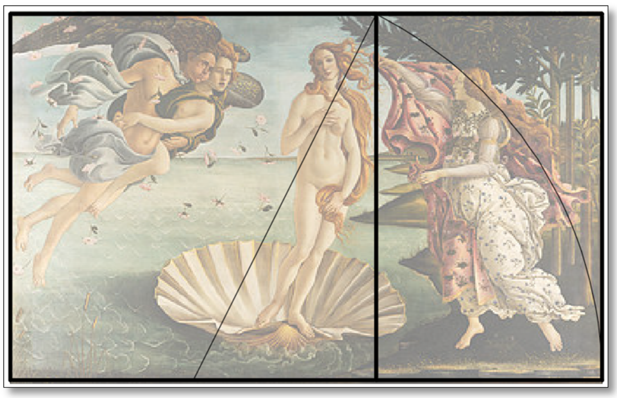
ARTE RENACENTISTA

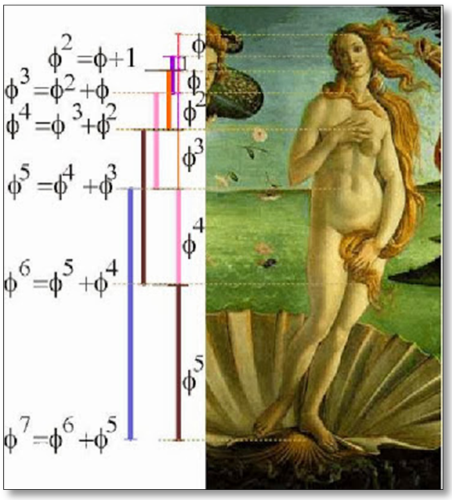
La proporción áurea se obtiene casi siempre con la ayuda del pentágono, que la contiene en todas sus partes. Posteriormente, la proporción áurea se reducirá al hábito de cortar las composiciones a cierta distancia del marco.

Pintura italiana del "Quattrocento"

Ejemplo: **"El Nacimiento de Venus"** de Botticelli (1444-1510). La relación de espacio entre los pies, el ombligo y la cabeza es de 0,618; que es la misma relación que hay entre el cuello del fémur y la rodilla y la longitud de la pierna entera y la misma que hay entre el codo y la punta del dedo medio y la longitud del brazo. Así mismo el resto de relaciones se dan en potencias de Φ.



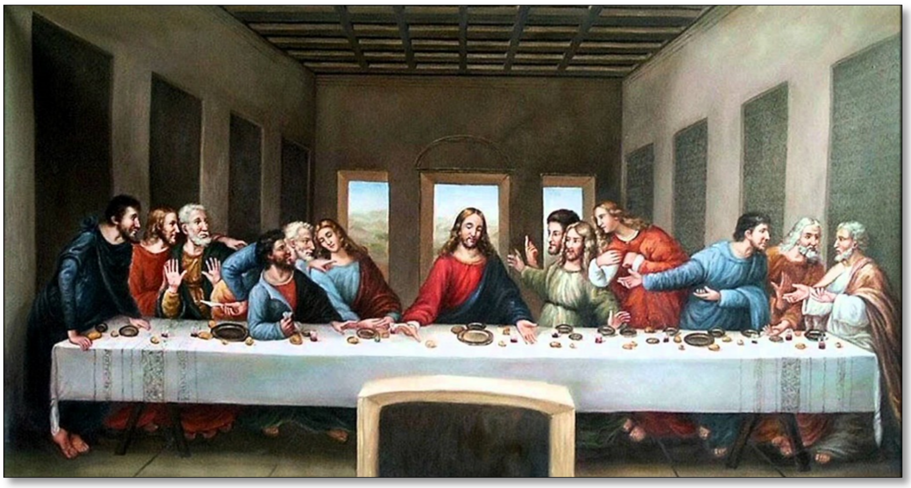


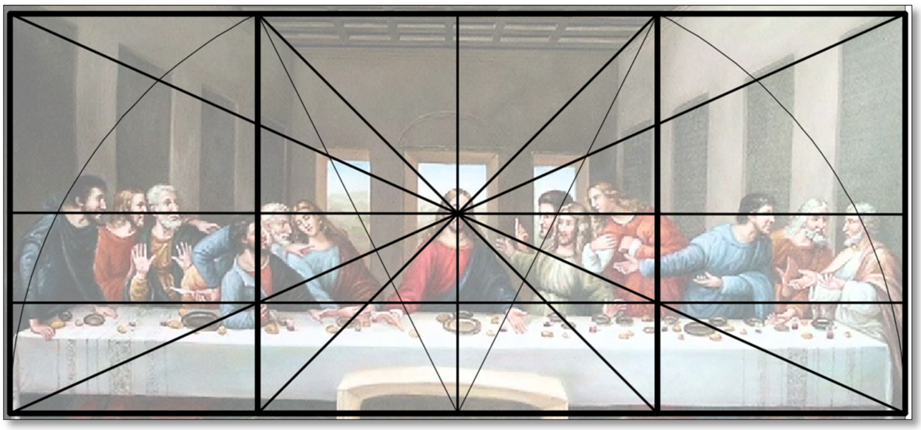


Pintura italiana del "Cinquecento"

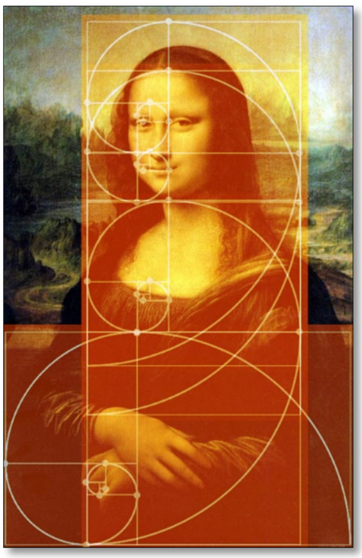
Como ya hemos mencionado anteriormente, **la relación de la música con las demás artes** es indiscutible. Recordemos que las proporciones de la música se basaban en proporciones áureas y que en su mayor parte se usaron tanto en la Pintura como en la Arquitectura. Leonardo da Vinci (1452-1519) describió su arte en términos musicales diciendo que la percepción simultánea de todas las partes integrantes de una pintura crea una armonía concordante que, para el ojo, es una sensación equivalente a aquella experimentada por el oído cuando escucha la música.

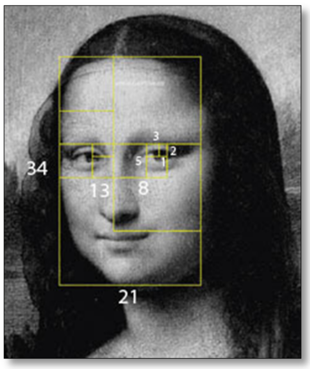
Ejemplo: **"La última cena"** de Leonardo da Vinci. Sigue una disposición simple del rectángulo $\sqrt{5}$. Aunque esta composición está centrada sobre el Cristo, su traza determina otro cuadrado central que está en proporción áurea con las longitudes sobrantes a los lados. En el cuadrado central, se inscribe un cuadrado más pequeño donde residen cuatro rectángulos áureos y a su vez la figura de Cristo se inscribe en otro rectángulo áureo delimitado por la ventana del fondo.





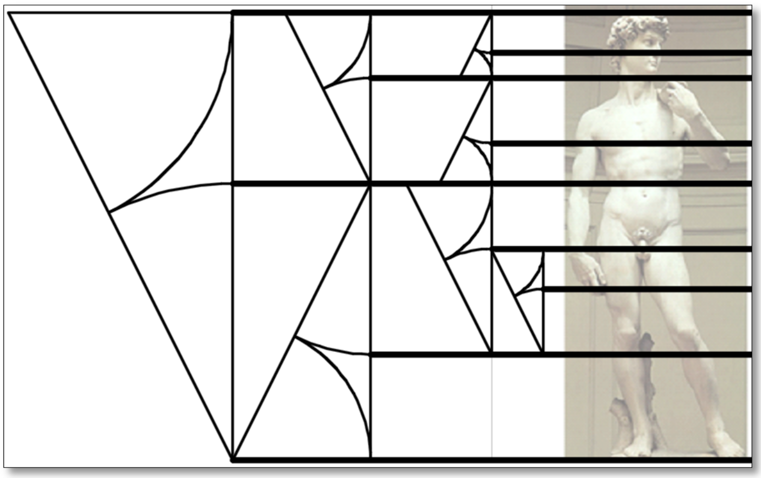
Ejemplo: **"La Gioconda"** o "Mona Lisa" de Leonardo da Vinci. La relación áurea la encontramos en las proporciones del cuadro, en las dimensiones del rostro, en el espacio que hay entre el cuello y la mano y en el que hay entre el escote del vestido y el final de la mano. Así mismo podemos observar la relación de la configuración del rostro con la serie de Fibonacci.





Escultura italiana del "Cinquecento"

Ejemplo: **"El David"** de Miguel Ángel (1475-1564) se ajusta en varios sentidos a la sección áurea, desde la situación del ombligo con respecto a la altura, hasta la colocación de las articulaciones de los dedos.



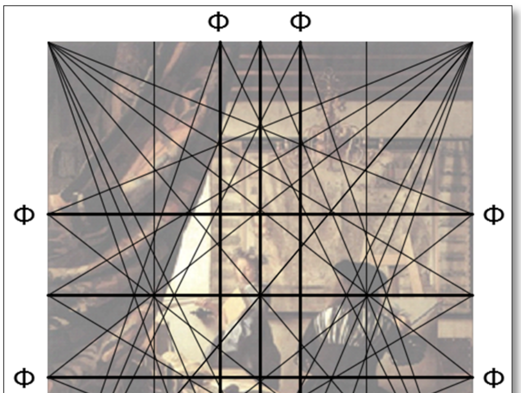
Pintura italiana manierista

Ejemplo: **"Venus y el organista"** de Tiziano (1487-1576). Construida sobre la relación 4/6/9, una de las más comunes en este artista, relacionadas a su vez con las descomposiciones áureas que configuran el cuadro.

ARTE BARROCO

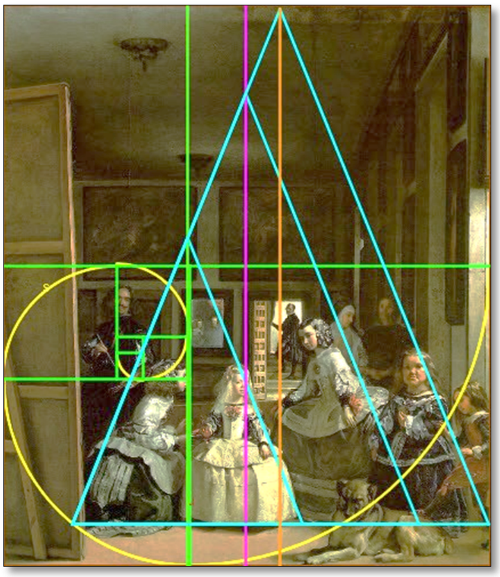
Pintura barroca holandesa

Ejemplo: **"El taller del pintor"** de Jan Vermeer (1632-1675). Esta obra merece una especial mención dado que es una obra totalmente regida por la proporción áurea. Vermeer nos demuestra su absoluto conocimiento y dominio de esta proporción. El cuadro se inscribe en una red de líneas ortogonales y oblicuas que conducen a un entramado áureo.



Pintura barroca española

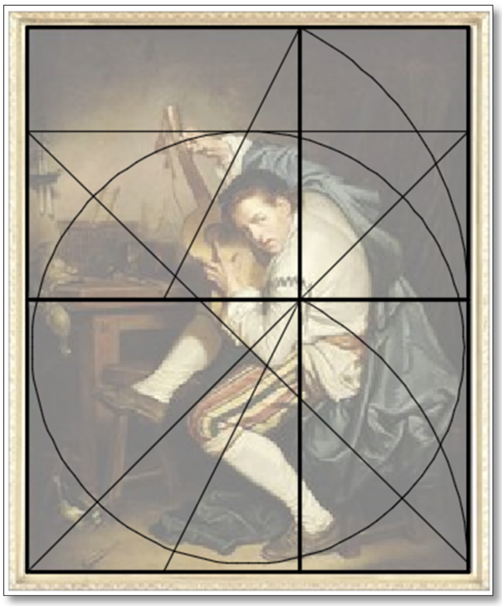
Ejemplo: **"Las Meninas"**, que Velázquez (1599-1660) pintó al término de su carrera, son ejemplo del sentido espacial que poseía este español y podemos pensar que detrás de estos trazos geniales se esconde la proporción áurea. En la trama de Las Meninas se esconde así mismo una espiral áurea.



ARTE DEL SIGLO XVIII (ROCOCÓ)

Pintura

Ejemplo: **"El Pajarero"** del pintor francés Greuze (1725-1815), quien utiliza también la medida áurea en alguno de sus cuadros como éste, donde la longitud de la figura marca la longitud del segmento áureo respecto el resto del cuadro.

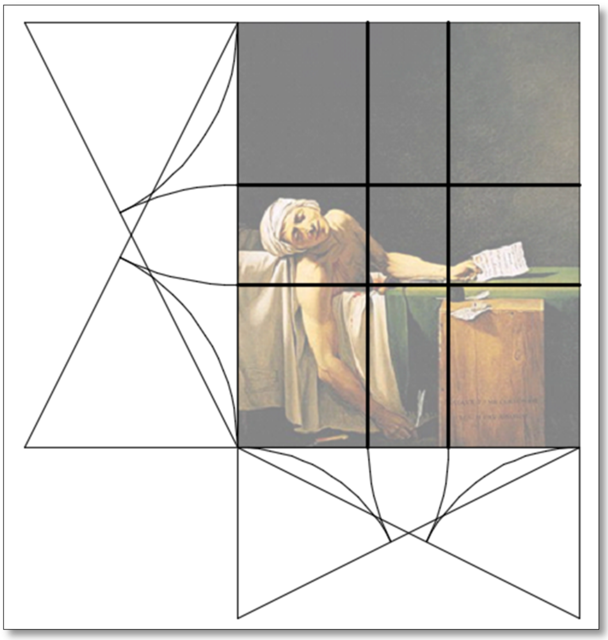


ARTE DEL SIGLO XIX

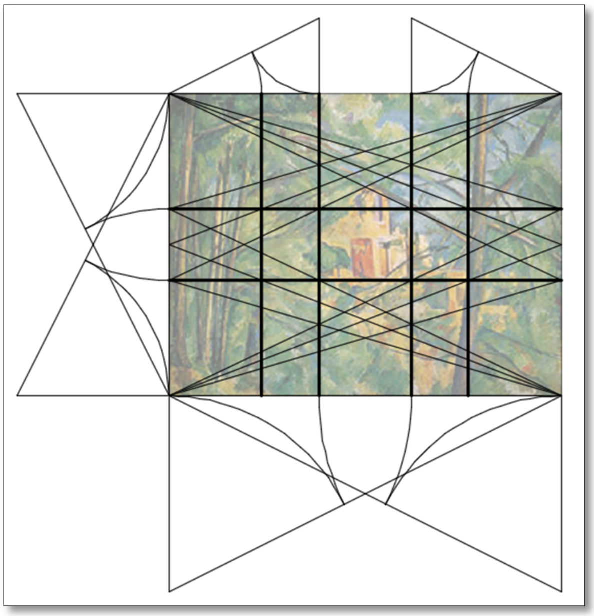
Pintura

En los años finales del S. XVIII y principios del S.XIX, se dan los movimientos del Clasicismo y Romanticismo en la Pintura. El primer estilo se caracteriza por el deseo de resucitar las formas de la antigüedad; el segundo por el culto al sentimentalismo, a la naturaleza, y el rechazo a la civilización. En La segunda mitad del S. XIX surge la llamada corriente Impresionista, llevada a cabo por un grupo de autores que imprimen un espíritu de cambio e innovación en el arte occidental.

Clasicismo
Ejemplo: Una de las obras más representativa de Jacques-Louis David (1748-1825), **"La muerte de Marat"** se descompone en medidas áureas de forma similar a la anterior; calculando los puntos Φ que dividen su altura encontramos la posición donde se encuadra a Marat.



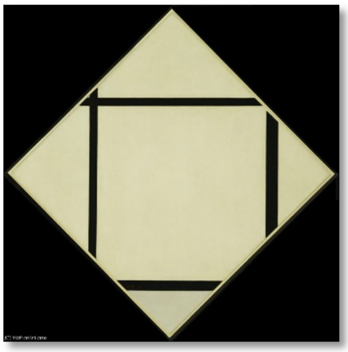
Movimientos impresionistas
Ejemplo: **"El castillo negro"** del artista posimpresionista Paul Cézanne (1839-1906), donde las líneas ortogonales y horizontales que estructuran el cuadro están sobre los puntos de sección áurea.

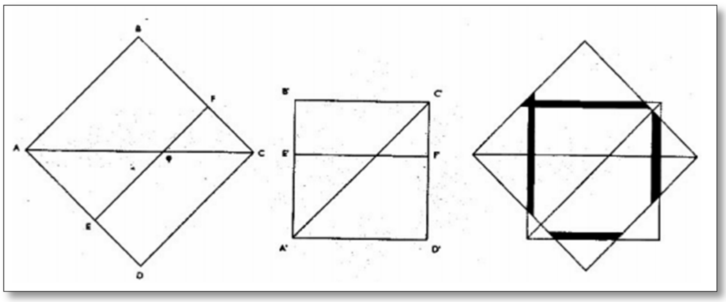


ARTE EN EL SIGLO XX

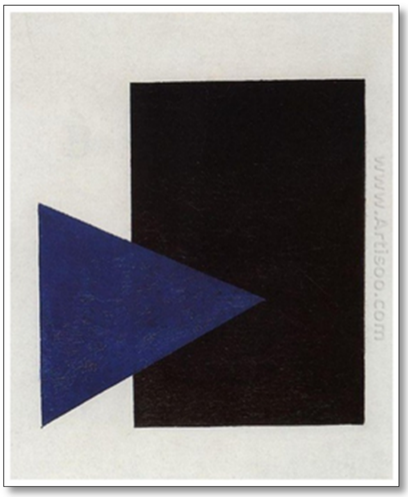
Pintura
Cubismo: Este movimiento representa la ruptura clara y definitiva con la pintura tradicional, lo que se insinuaba con el cubismo no era solo una transformación del arte, sino una nueva manera de ver el mundo.
Abstracción geométrica: La abstracción geométrica, nacida en la segunda década del siglo XX, como consecuencia del Cubismo, es un gran movimiento que agrupa a distintos autores pertenecientes a movimientos menores, como el **Orfismo** o el **Neoplasticismo**, bajo una misma idea: dar prioridad al orden conceptual sobre la percepción sensorial, que exige una armonía paralela a la naturaleza y no una imagen de ella.

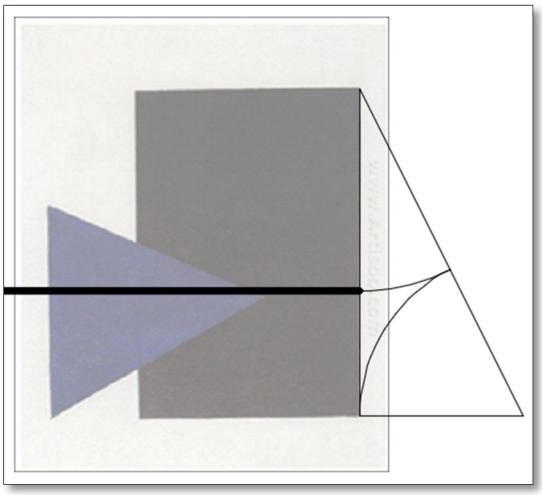
Ejemplo: **"Pintura I"** del holandés neoplasticista Piet Mondrian (1827-1944). Partiendo del gran cuadrado inicial lo corta por la diagonal AC y por una paralela a los lados AB y CD que pasa por el punto Φ de la diagonal. El segmento Φ va a ser el lado de un cuadrado menor que obedece al mismo esquema anterior y que se situará sobre éste pero con las posiciones invertidas, el antiguo lado será la posición de la nueva diagonal.





Constructivismo ruso: Dentro del Constructivismo ruso también existían artistas que compartían la abstracción geométrica con posiciones muy próximas al Neoplasticismo.
Ejemplo: **"Suprematismo 418"** de Kasimir Malevitch (1878-1935). En esta obra vemos como el triángulo se coloca sobre la posición áurea del lado del rectángulo, haciendo coincidir en la paralela al lado menor del rectángulo que pasa por Φ, este punto Φ y el vértice del triángulo.

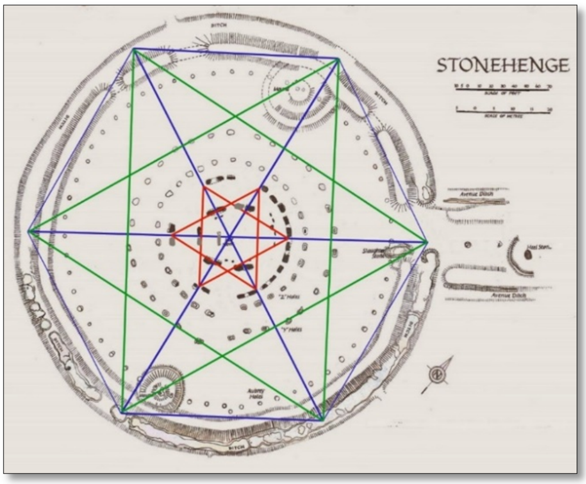


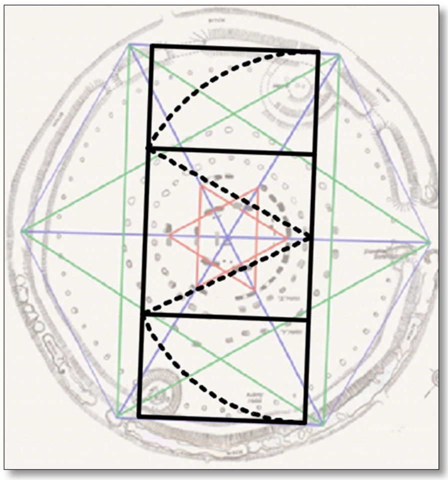


FICHA RESUMEN 17
LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA

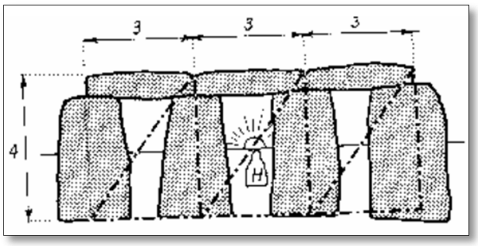
ARQUITECTURA MEGALÍTICA

La investigación arqueológica y astronómica ha establecido que los grandes monumentos de piedra construidos por todo el norte de Europa hace alrededor de 3.5000 años eran brújulas, calendarios, etc., así como altares sagrados para los rituales religiosos.
Ejemplo: El más famoso de esos monumentos megalíticos es **Stonehenge**, en las llanura de Salisbury en Inglaterra, construido en etapas entre los siglos XX y XVI a. C. Vemos que existe relación áurea entre el ancho de la Herradura de megalitos de tres piedras grises azuladas y el diámetro del Círculo Pagano o Druida. El rectángulo formado por las Piedras de las Estaciones se aproxima al rectángulo $\sqrt{5}$, formado por dos rectángulos áureos recíprocos. Así mismo se pueden observar trazados geométricos sencillos cuya base geométrica generatriz es el hexágono.





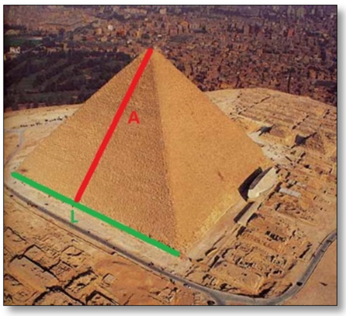
El análisis geométrico, con la ayuda de las líneas centrales de los pilares y las diagonales, también muestra que las proporciones de los arcos paganos resultan cercanas a las relaciones del triángulo 3-4-5.

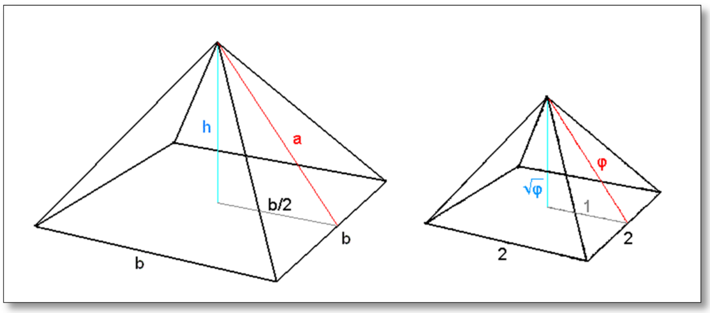


ARQUITECTURA EGIPCIA

Ya los egipcios, observando las proporciones del cuerpo humano descubrieron el número áureo, que aplicaron a algunas de sus construcciones.

Ejemplo: En la **Pirámide de Keops** la relación entre su altura y la mitad del lado de su base se corresponde con el número áureo φ. "Herodoto relata que los sacerdotes egipcios le habían enseñado que las proporciones establecidas para la Gran Pirámide entre el lado de la base y la altura eran tales, que el cuadrado construido sobre la altura vertical era exactamente igual al área de cada una de las caras triangulares".



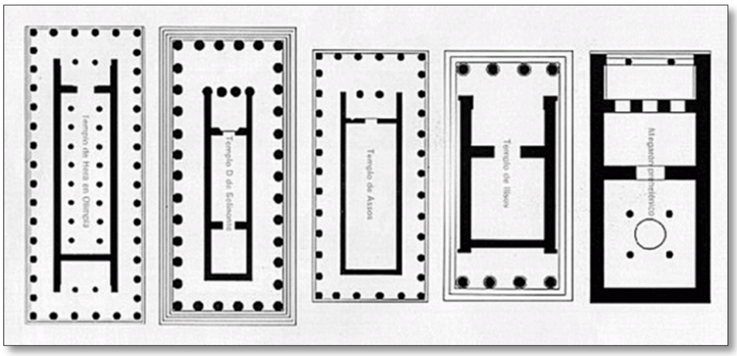


Para que se cumpla la condición de Herodoto, la Pirámide de Keops ha de ser semejante a una pirámide en la que la altura de la cara lateral se a igual a φ, y la altura de la pirámide valga $\sqrt{\varphi}$.

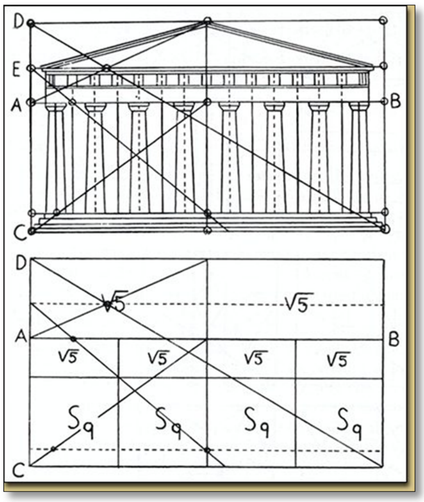
ARQUITECTURA CLÁSICA: GRECIA Y ROMA

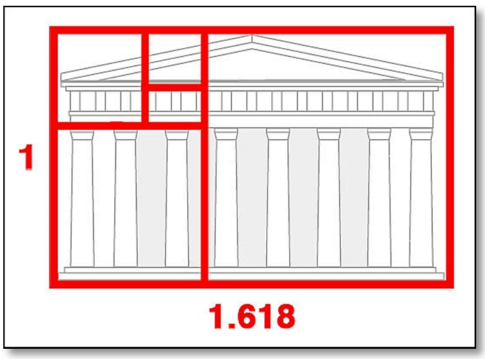
Los principios de arquitectónicos romanos derivan de los griegos y el único testimonio escrito de los cánones arquitectónicos usados en la Antigüedad es un tratado de diez libros, obra del arquitecto romano Vitruvio, titulado “De Architectura”, que no es más que un compendio de directrices griegas. De la misma forma que en el cuerpo humano existe una especie de armonía simétrica entre el antebrazo, la palma de la mano, el dedo y otras partes pequeñas, lo mismo ocurre también en los edificios perfectos. Los romanos seleccionaros partes del cuerpo humano como módulo-modelo, como hacían los griegos al diseñar los templos. Siguiendo el criterio de diseño griego -diseñar los templos según proporciones humanas- se recomienda que la longitud del templo duplique su ancho y que las proporciones del vestíbulo de entrada abierto (pronaos) y de la habitación interior cerrada (cella) estén en relación 3-4-5 (3 la profundidad del pronaos, 4 el ancho y 5 la profundidad de la cella).

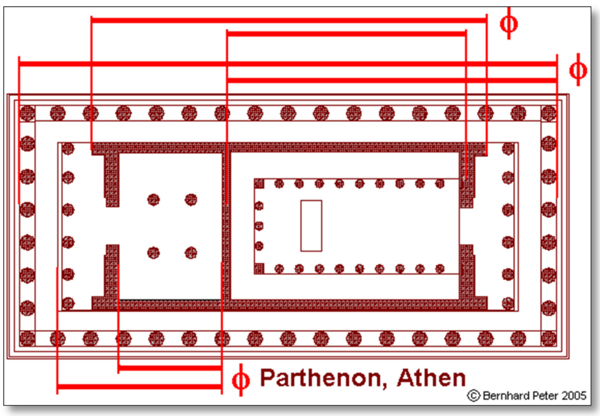
A continuación se muestran las relaciones proporcionales de los templos según Vitruvio comparadas con ejemplos reales donde observamos también la correspondencia de estos con las armonías musicales.



Vitruvio también aportó muchas otras recomendaciones en cuanto a las proporciones de los templos, todas basadas en modelos griegos. Por ejemplo, se refirió a las distancias entre columnas y a la altura correcta de éstas, ambas medidas expresadas en términos de diámetro columna. Ese elemento, elegido para expresar las proporciones de la estructura completa (tal como los pies lo hacen respecto de las proporciones del cuerpo humano), se llama módulo, concepto que desempeña un importante papel a todo lo largo de la historia de la arquitectura.
Ejemplo: **El Partenón** es uno de los principales templos dóricos que se conservan, construido entre los años 447 y 432 a. C. en la Acrópolis de Atenas. La parte superior de los capiteles de las columnas está cerca del punto de la sección áurea de la altura total, y las líneas centrales de las dos columnas de las esquinas, más las líneas del piso y la parte superior del entablamento forman un rectángulo de $\sqrt{5}$, que consta de dos rectángulos áureos recíprocos. Las columnas frontales del Partenón con sus siete espacios intermedios incorporan tanto el coeficiente 3/4 del triángulo pitagórico y la correspondiente armonía musical de cuarta-diatéseron, como afinidad con proporciones áureas o armonía de quinta-diapente. El plano del Partenón corresponde a dos rectángulos áureos recíprocos y refleja de ese modo la armonía de diapente. La naos o cella y el tesoro o cámara de la virgen corresponden a la proporción áurea.

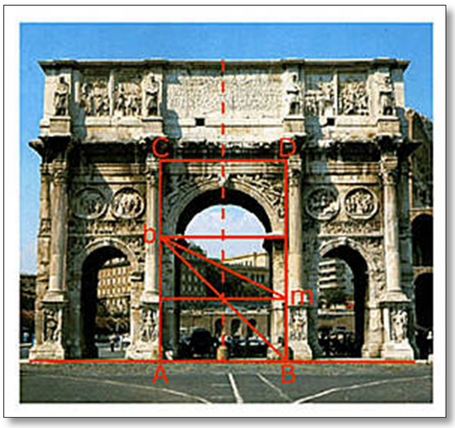


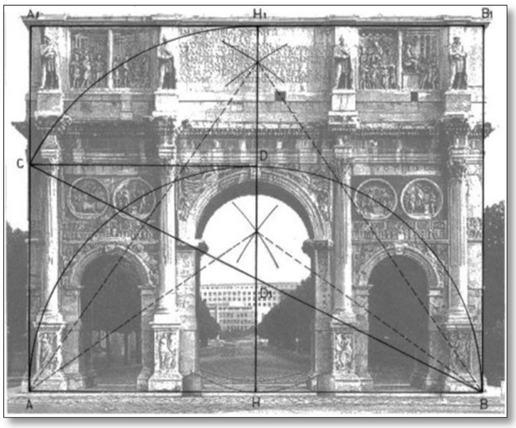




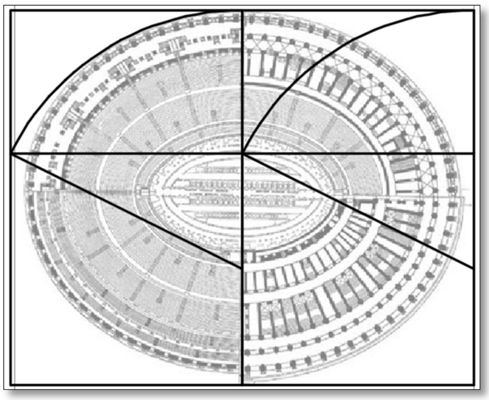
La arquitectura griega y la romana se unifican en sus proporciones, como ya dijimos.

Ejemplo: El **Arco de Constantino** (315). La forma global de la estructura del Arco resulta cercana a dos rectángulos áureos.





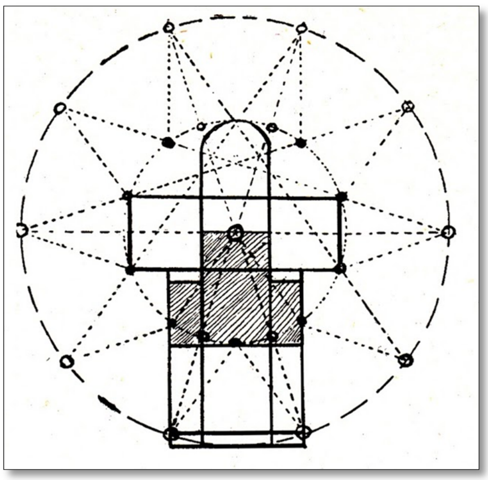
Ejemplo: El **Coliseo,** construido en el siglo I. El estudio proporcional del Coliseo muestra que el plano se encuadra en dos rectángulos áureos y que el ancho de la elipse gigante que forman la pared exterior se relaciona con el ancho de la arena central en la proporción de $\sqrt{5}$ generada por dos rectángulos áureos recíprocos.

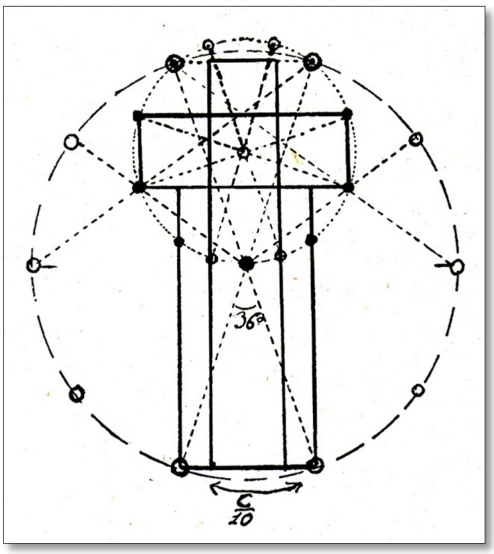


ARQUITECTURA GÓTICA

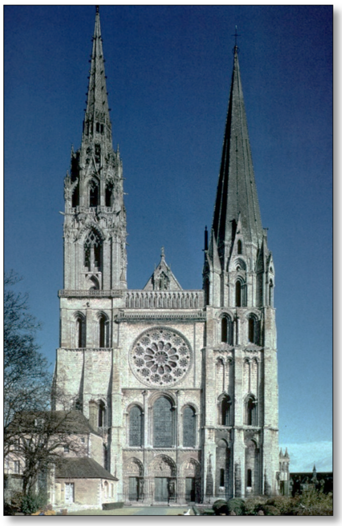
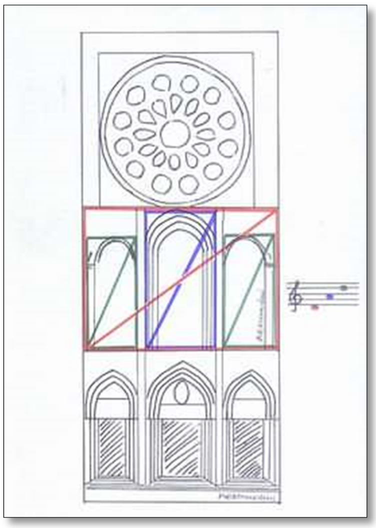
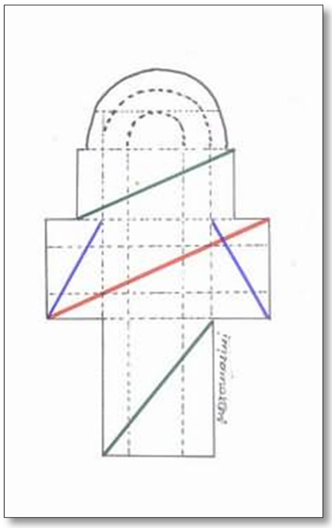
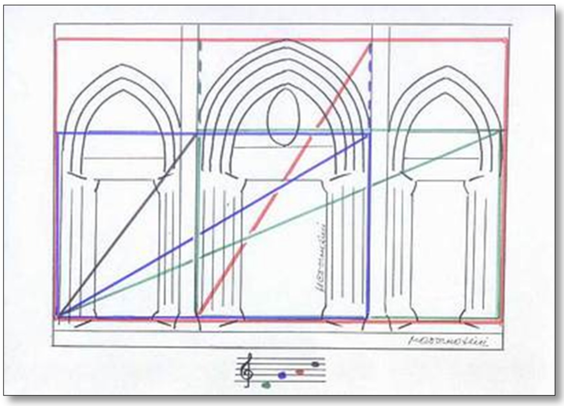
El arte gótico occidental europeo está comprendido entre el Románico y el Renacimiento y contraponiéndose al arte clásico. La arquitectura gótica frecuentemente adoptará el triángulo pitagórico 3-4-5 (o triángulo egipcio) como trama reguladora de sus fachadas, introduciendo así en ellas un crecimiento armonioso. Las plantas de muchas de las catedrales góticas europeas suelen tener dos elementos constantes: el doble cuadrado y la sección áurea.

Otros trazados góticos típicos nos lo muestra el investigador **Moessel** (1921) donde destacamos las plantas pentagonales y decagonales.



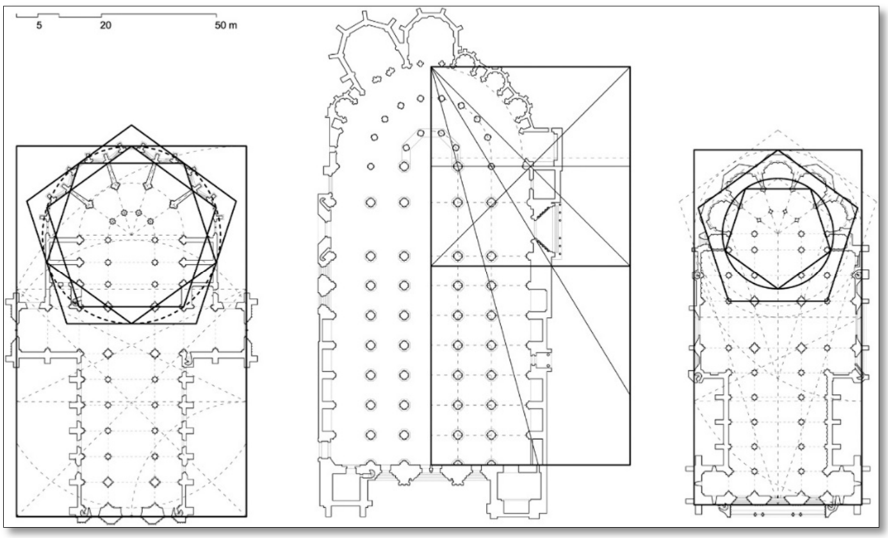


Ejemplo: La **Catedral de Chartres** (1220). Las relaciones de proporcionalidad se verifican, por ejemplo, entre las diagonales de los rectángulos que encierran a los tres ventanales románicos, entre el diámetro del rosetón y el lado del cuadrado que lo encierra, y entre otras importantes diagonales de la fachada. Sin embargo, es en el Portal Real donde se observa la más armoniosa de las trazas. En efecto, este diseño está basado en rectángulos áureos cuyas diagonales también están proporcionadas entre sí musicalmente.

Arquitectura gótica española

Ejemplos: Esquemas geométricos de los desarrollos en planta de la **Catedral de Burgos** (a la izquierda), la **Catedral de Toledo** (al centro) y la **Catedral de León** (a la derecha). Todos ellos basados en el pentágono y en el número áureo.



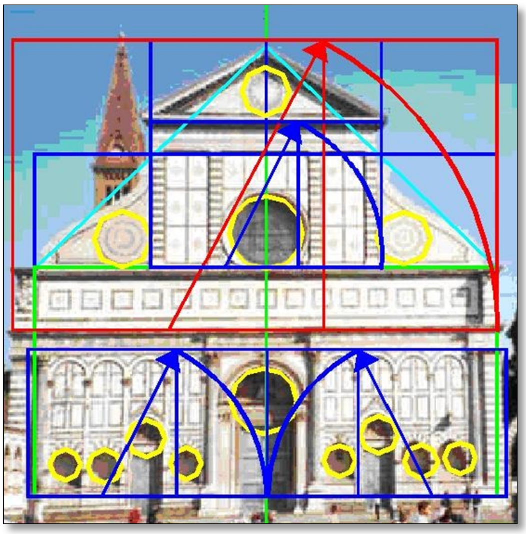
ARQUITECTURA RENACENTISTA

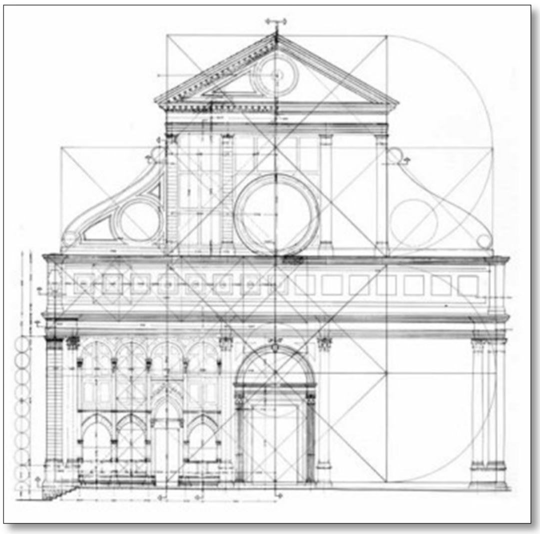
Arquitectura renacentista italiana del Quattrocento

Como hemos visto anteriormente, los creadores renacentistas retomaron los cánones clásicos en todas las artes. Leon Bautista Alberti (1404-1472), arquitecto renacentista, afirmó que una proporción armoniosa en el diseño arquitectónico era aquella que, expresada como una armonía musical, condujese a una concordancia agradable. En el capítulo V de su tratado de arquitectura “De re aedificatoria” explica cómo los intervalos musicales agradables al oído son los intervalos de cuerda del **diapasón, diapente y diatesarón**, y hace una descripción de las proporciones más usadas para distribuir superficies en función de estas relaciones que resumimos a continuación:

SUPERFÍCIE SESQUILÁTERA..........................	2/3
SUPERFÍCIE SESQUITERCIA...........................	3/4
SUPERFÍCIE DOBLE	1/2
SUPERFÍCIE SESQUILÁTERA DOBLE.............	4/6/9
SUPERFÍCIE SESQUITERCIA DOBLE...............	9/12/16
SUPERFÍCIE DIAPASÓN-DIAPENTE.................	3/6/9
SUPERFÍCIE DIAPASON-DIATESARON...........	3/6/8

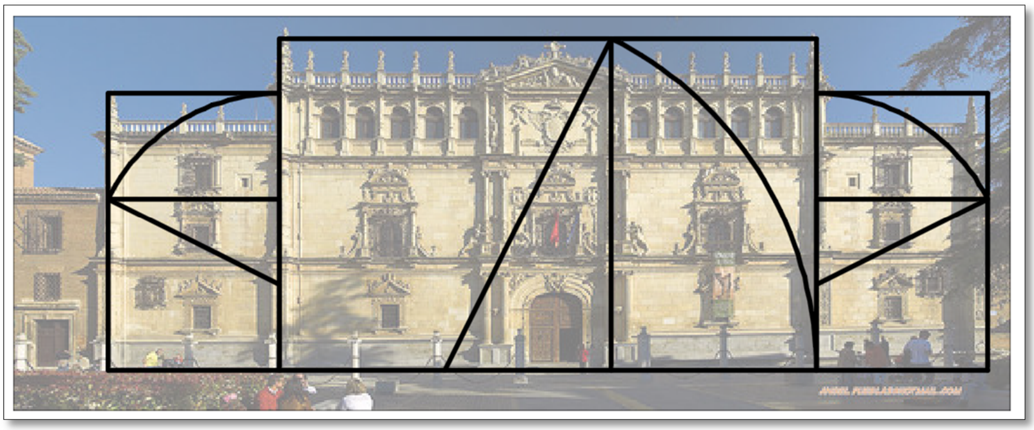
Ejemplo: La **Iglesia de Santa María Novella** de Leon Bautista Alberti, demuestra la preocupación de Bautista por la armonía de los números y las proporciones musicales. Toda la fachada se descompone en proporciones sencillas y toma la medida de oro para situar el segundo piso, en donde vuelve a usarla para encuadrar el ojo de buey.





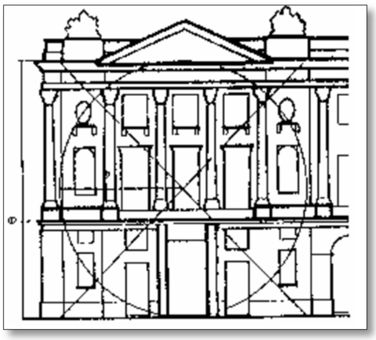
Arquitectura renacentista española

Ejemplo: La fachada principal de la **Universidad de Alcalá de Henares** (1551) nos muestra otro ejemplo de "arquitectura áurea" en la que Rodrigo Gil (1500-1577) ha realzado la importancia de los huecos con un hermoso encuadre de proporciones áureas.



ARQUITECTURA ROCOCÓ

Ejemplo: El **Edificio de la Marina** en París, en la plaza de la Concordia. Fue construido entre 1757 y 1774. La fachada fue concebida por Ange-Jacques Gabriel (+1742), primer arquitecto del rey francés, autor de los planos de la plaza Luis XV (hoy día plaza de la Concordia). Es el arquitecto francés que mejor encarna este estilo. Gabriel siguió los cánones del número áureo en el diseño de los palacios de la Plaza de la Concordia de París, tanto en lo referente a las columnatas como en lo referente a los pabellones.

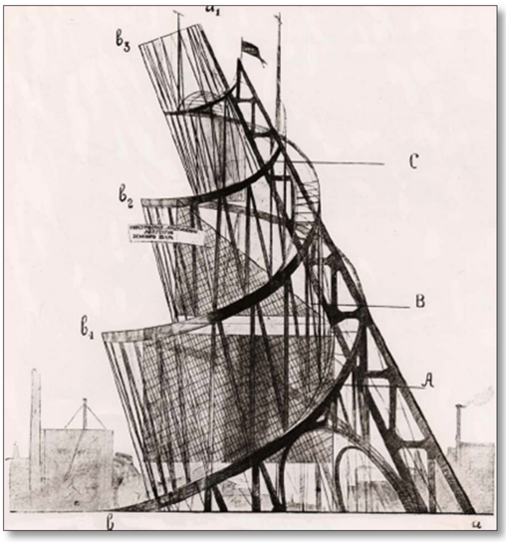


ARQUITECTURA DE LOS SIGLOS XIX Y XX

Constructivismo ruso

Dentro del Constructivismo ruso también existían artistas que compartían la abstracción geométrica con posiciones muy próximas al Neoplasticismo. Destacamos en este periodo dos obras entre la escultura y la arquitectura.

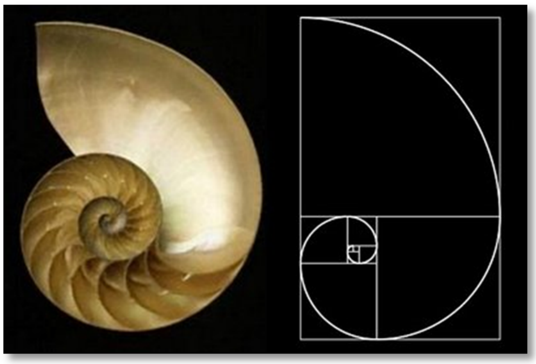
Ejemplo: **Monumento a la tercera Internacional** de Vladimir Tatlin (1895-1956). Su forma en espiral, es muy cercana a la espiral áurea. Se trataba de una torre de estilo constructivista de unos 400 metros de alto, superando en altura a la Torre Eiffel de París. Consistiría en una estructura espiral de hierro y acero, volcada hacia un lado en el ángulo del eje terrestre, conteniendo en su interior cuatro estructuras de vidrio con diferentes formas.



Gaudí

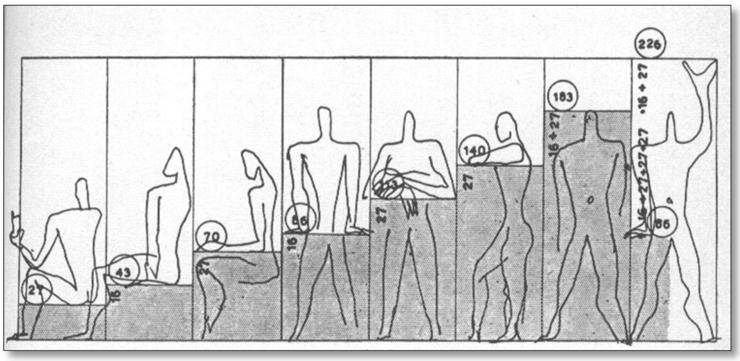
Detrás de un movimiento llamado **Modernismo** se encuentra Antoni Gaudí (1852-1926), iniciador y máximo representante del mismo en Cataluña.

Ejemplo: Su obra maestra, **La Sagrada Familia** de Barcelona, inacabada aún y de cuya construcción se encargó el arquitecto en 1883, es uno de los edificios más representativos del modernismo europeo. Gaudí hizo el primer proyecto del templo partiendo del tipo gótico, acentúo la verticalidad de elementos, introdujo soluciones geométricas y estructuras insólitas y añadió una decoración minuciosa que reproducía en muchos casos la naturaleza. Sobre este último punto, hay que incidir en la relación existente entre naturaleza y sección áurea. Vimos anteriormente que muchas formas naturales poseen formas espirales que se corresponden con espirales que se forman mediante una relación áurea. Un ejemplo, lo encontramos en muchas conchas de mar y una de estas conchas fue la que Gaudí reprodujo en una de las escaleras de la Sagrada Familia.

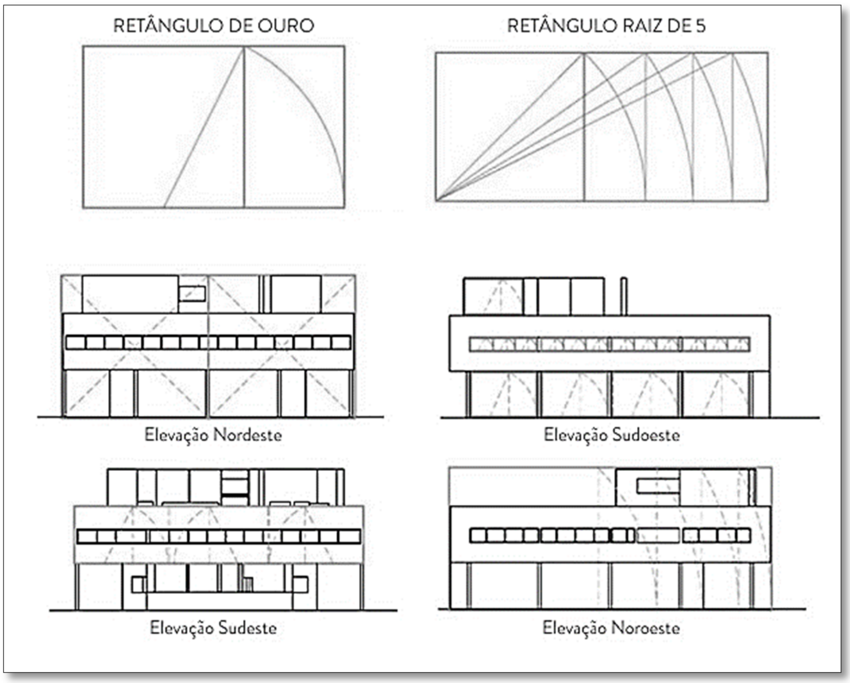


Le Corbusier

Charles-Édouard Jeanneret, Le Corbusier (1887-1965), consideró la naturaleza como encarnación de todo lo verdadero, bello, sano y original. Todo lo que llevó a cabo a lo largo de su vida giraba en torno a estos dos conceptos: naturaleza y geometría. Le Corbusier elaboró un sistema de medidas y proporciones cuya validez sería independiente de las diferentes convenciones en uso y que, sin esfuerzo podría trasladarse del sistema métrico a medidas anglosajonas. Como hemos visto anteriormente, este sistema lo llamó Modulor como muestra de la importancia y papel fundamental que Le Corbusier otorga a la sección áurea.



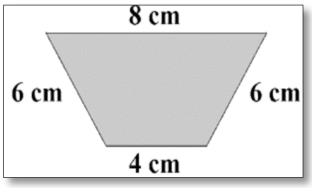
Ejemplo: La **Villa Saboya** es un edificio situado en Poissy, a las afueras de París, que fue construido en 1929 y proyectado por Le Corbusier, uno de los arquitectos más influyentes del siglo XX. La Villa Saboya es considerada como el paradigma de la Arquitectura Internacional y de la nueva manera de construir edificios de viviendas del siglo XX. En su diseño se tuvo muy presente la proporción áurea.

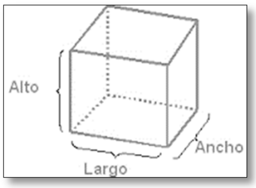

RETÂNGULO DE OURO
RETÂNGULO RAIZ DE 5
Elevação Nordeste
Elevação Sudoeste
Elevação Sudeste
Elevação Noroeste

7.4. ANEXO IV: HOJAS DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 1
REPASO DE MAGNITUDES Y UNIDADES DE MEDIDA

1. Identificar qué magnitudes representan las siguientes imágenes y propón, siempre que sea posible, al menos tres unidades de medida para cada una de ellas:





2. Responder SÍ o NO. ¿Pueden los siguientes conceptos ser definidos como magnitudes?

Número de ruedas de un vehículo	SI / NO
Color de una camisa	SI / NO
Capacidad de un depósito	SI / NO
Altura de un edificio	SI / NO
Intensidad de brillo de una bombilla	SI / NO
Tipo de tejido de un pantalón	SI / NO
Dinero	SI / NO
Volumen de un altavoz	SI / NO
Forma de una bicicleta	SI / NO
Población de un país	SI / NO

3. Identificar qué magnitudes corresponden a las siguientes unidades de medida, e indica para cada una de ellas otra unidad de medida alternativa en caso de que exista:

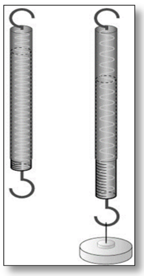
UNIDAD DE MEDIDA	MAGNITUD	UNIDAD DE MEDIDA ALTERNATIVA
dm^3		
hl		
ha		
kg		
$		
átomos		
personas		
ms		
ºC		
millas		
km/s		
m^3/h		
g/cm^3		

HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 2
PROPORCIONALIDAD SIMPLE

1. Si 7 litros de mi refresco favorito cuestan 21 €. ¿Cuánto costarán 2 litros? ¿Cuántos litros podré comprar con 9 €? Realiza mentalmente los cálculos.

2. Un autobús de línea tarda una media de 6 minutos en realizar 3 km de recorrido. ¿Cuánto tardará en realizar 13 km? Realiza mentalmente los cálculos.

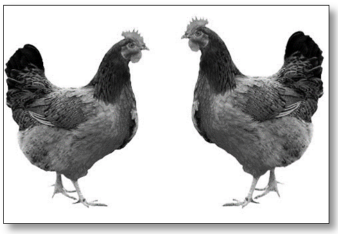
3. Por cinco horas y media de alquiler de una bicicleta mi primo ha pagado 15 €. ¿Cuánto me cobrarán por alquilarla 3 horas y 15 minutos?



4. En un laboratorio se ha realizado el siguiente experimento: Medir la longitud de un muelle cuando se cuelgan varias masas del mismo. Completa la siguiente tabla de proporcionalidad calculando primero la razón de proporcionalidad:

Masa (Kg)	*0*	*10*	*20*		*45*
Longitud (cm)	*20*	*22*		*25,5*	

5. Una granja tiene 350 gallinas y dispone de pienso para alimentarlas durante 60 días. ¿Cuánto le durará el pienso si compra 100 gallinas más? ¿Y si vende la mitad de las gallinas?



6. Una gasolinera trata de averiguar cuánto tiempo permanecerá lleno uno de sus tanques de combustible en función de los litros demandados cada hora por los usuarios. Completa la tabla siguiente hallando primero la razón de proporcionalidad:

Tiempo (días)	*7*	*5*		*2*	
Demanda (l/h)		*95*	*150*		*300*

HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 3
PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

1. Instalar una tarima de madera en el suelo de una habitación de 5,40 m x 3,50 m cuesta 150 €. ¿Cuánto costará poner el mismo tipo de tarima en el suelo de un pasillo de 1,90 m x 6,00 m?

2. 6 jardineros han cobrado un total de 2.500 € por un trabajo de jardinería que ha durado 5 días. ¿Cuántos jardineros habrán trabajado en el jardín si éstos han facturado un total de 3.200 € por un trabajo de 8 días?

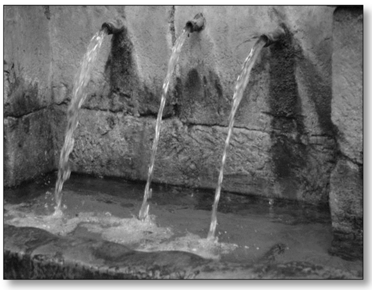
3. 6 obreros trabajando 7 horas diarias realizan una obra en 12 días. ¿Cuánto tardarán en hacer la misma obra 10 obreros trabajando 5 horas diarias?

4. Dos pintores tardan en pintar una superficie de 35 m2 4 horas y media. ¿Cuánto tardarán en pintar una superficie de 60 m2 tres pintores?

5. Un coche consume 6,5 litros cada 100 kilómetros. Si la gasolina está a 1,5 € el litro, ¿cuál será el presupuesto para el combustible de un viaje de 480 kilómetros?

HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 4
REPARTOS PROPORCIONALES

1. Una empresa reparte 9.800 € de beneficios entre cuatro empleados de forma directamente proporcional a su antigüedad en la empresa. ¿Cuánto dinero recibirá cada uno si Juan lleva trabajando 10 años, Ana lleva 12 años, María lleva 18 años y Luís lleva 20 años?



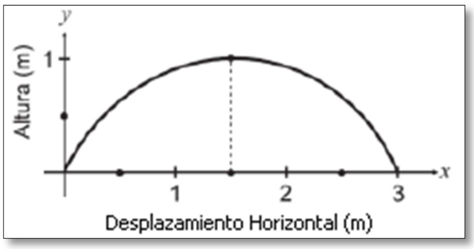
2. Una fuente tiene tres caños iguales que han vertido un total de 12.600 litros. El primer caño ha estado abierto 1 hora y 20 minutos, el segundo 90 minutos y el tercero 1 hora y 45 minutos. ¿Cuántos litros arrojó cada caño?

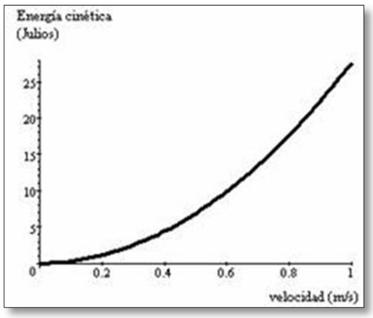
3. Un pueblo celebra todos los años una carrera de atletismo infantil. Este año el premio ha sido de 1.000 €, y se ha repartido de forma inversamente proporcional a los tres mejores tiempos de llegada a la meta. ¿Cómo se ha repartido dicho premio si Felipe ha llegado a la meta en 17 minutos 13 segundos, Pablo en 18 minutos y 36 segundos y Lucio en 19 minutos y 5 segundos?

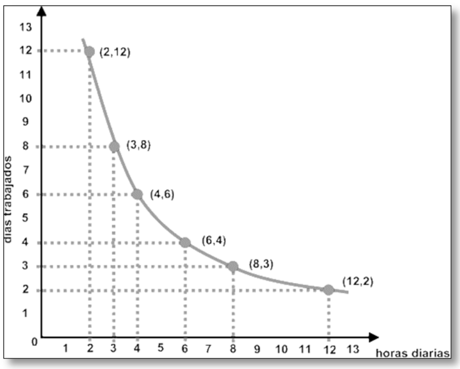
4. Un organismo de protección medioambiental pretende plantar 3.000 árboles jóvenes en tres zonas distintas de un valle de manera inversamente proporcional al número de árboles que ya existen en cada zona. La zona A tiene 1.500 árboles, la zona B tiene 1.100 árboles y la zona C tiene 890 árboles. ¿Cuántos árboles se plantarán en cada zona?

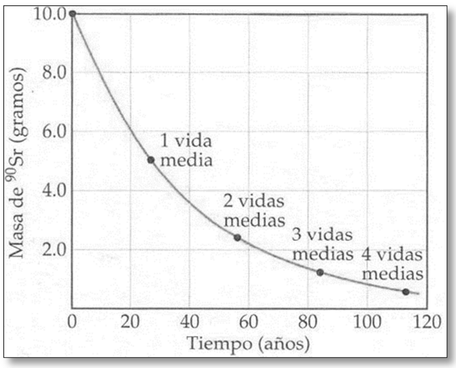
HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 5
LA PROPORCIONALIDAD EN LAS FUNCIONES Y GRÁFICAS

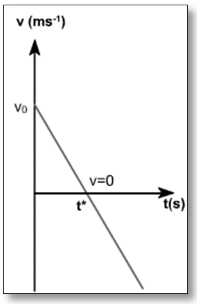
1. Las siguientes gráficas muestran una relación entre pares de magnitudes. Indica qué gráficas se corresponden con una proporcionalidad directa o inversa:

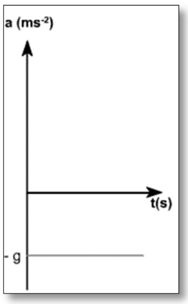


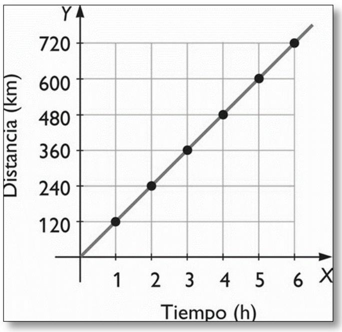


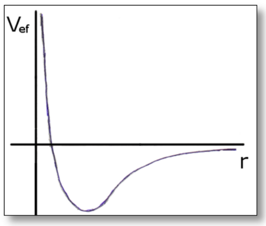












2. Un arquero pretende estudiar la precisión con la que hace diana en el blanco en función de la distancia a la que se sitúa de éste. Para ello ha elaborado la siguiente tabla:

Distancia al blanco (m)	*12,5*	*25*	*37,5*	*42*
Porcentaje de dianas (%)	*90*	*45*	*30*	*26,78*

Dibuja una gráfica donde se representen estos valores. ¿Cuál es la ecuación que relaciona ambas magnitudes?

3. Una alberca proporciona agua para regadío a varias huertas. Se pretende conocer con qué frecuencia es necesario renovar el agua de ésta si para abastecer a más huertas es necesario aumentar el diámetro de la tubería que extrae agua de la misma. Para ello se han obtenido los siguientes datos:

Diámetro de la tubería (cm)	*20*	*30,5*	*42,5*	*50*
Velocidad de renovación (m^3/día)	*50*	*76,25*	*106,25*	*125*

Dibuja una gráfica donde se representen estos valores. ¿Cuál es la ecuación que relaciona ambas magnitudes?

4. A un comercial le ofrecen dos modalidades de contratación dentro de una empresa por las ventas de un determinado producto:

- En la primera se le ofrece un sueldo base de 500 € al mes y por cada venta que haga 50 € más al mes.
- La segunda no se le ofrece sueldo base, en cambio por cada 2 ventas que haga le pagarán 175 € más al mes.

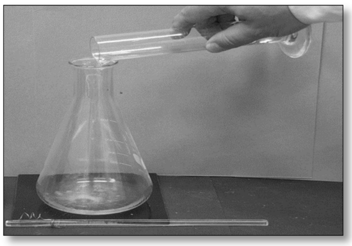
Como aún no sabe cuántas ventas hará, elige a priori la primera modalidad, pero ¿a partir de cuántas ventas le interesará cambiar a la segunda modalidad? Justifica la elección mediante una gráfica.

HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 6
LAS APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD A LOS PROBLEMAS DEL MUNDO FÍSICO

1. El hierro y el azufre se combinan para formar una nueva sustancia: El sulfuro de hierro. Éstos siempre se combinan en la misma proporción de 7 partes de hierro en peso por cada 4 partes en peso de azufre. ¿Qué ocurre si combinamos 9 kg de hierro con 4 kg de azufre?

2. Si mezclamos 12 kg de café de 12,40 €/kg con 8 kg de otro tipo de café de 7,40 €/kg ¿Cuál será el precio de la mezcla?

3. El agua tiene una densidad de 999,2 g/l y el alcohol de 794,7 g/l. Se prepara en el laboratorio una disolución mezclando 3 litros de agua con 7 litros de alcohol. ¿Cuál será el peso de 5 litros de dicha disolución?



4. Un joyero quiere fundir un lingote de 2 kg de oro de **ley* 0,85 con otro lingote de 1,5 kg de oro de ley 0,9. ¿Cuál es la ley del lingote resultante? *(La *ley* de una aleación es el cociente entre el peso del metal precioso y el peso total de la aleación).

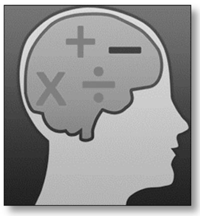
5. Un coche se desplaza a una velocidad media de 120 km/h y un camión a 90 km/h. Si el coche va por detrás del camión a 75 km de distancia, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzarlo? Si ahora se encuentran a una distancia de 250 km y se dirigen uno hacia el otro, ¿cuánto tardarán en cruzarse?

6. Un tren que avanza a una velocidad media de 70 km/h va 90 km por delante de otro tren que avanza por una vía paralela a una velocidad media de 110 km/h. Calcula el tiempo que tardará el segundo tren en alcanzar al primero y como la distancia que recorrerá hasta lograrlo.

7. Dos caños vierten agua en un pilón de 500 litros de capacidad. Si el caudal del primero es de 75 l/min y el del segundo de 50 l/min, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar el pilón?

8. Dos depósitos contienen agua para riego. El primero tiene una capacidad de 30.000 litros. En este primer depósito, se abren simultáneamente su desagüe, que saca agua de forma constante con un caudal de 360 l/min, y su grifo, que vierte agua a razón constante de 150 l/min. Calcule el tiempo en que se vaciará el primer depósito. Calcule el tiempo que tardará en llenarse o vaciarse un segundo depósito si sabemos que éste tiene un desagüe que lo vaciaría en 3h y media, un grifo que lo llenaría en 4 horas y cuarto y otro grifo que lo llenaría en 6 horas.

HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 7
PORCENTAJES Y PROPORCIONALIDAD



1. Realiza mentalmente los siguientes cálculos:

El 10% de 650, el 2% de 45, el 50% de 250, el 0,1% de 3000, el 25% de 140, el 200% de 80.

2. Juan compró un coche por 15.000 € y lleva pagado el 75% de esta cantidad ¿Qué porcentaje le queda por pagar? ¿Cuánto dinero es lo que le queda por pagar?

3. Elena pidió prestados a una amiga 150 € y aún le queda pendiente devolverle 45 € ¿Qué porcentaje tiene aún pendiente? ¿Qué porcentaje ha pagado ya a su amiga?

4. Un inversor compró el año pasado una vivienda por 245.000 € y desde entonces el precio ha subido un 2,5% ¿Cuál será el valor actual de la vivienda?

5. Una tienda de ropa tiene unos beneficios brutos mensuales de 54.800 €, pero ha de pagar un 21% de impuestos ¿Qué beneficio neto mensual percibe?

6. El valor de una determinada acción sufre en bolsa las siguientes variaciones a lo largo de los cuatro últimos meses: En septiembre aumenta un 5%, en octubre baja un 2,3%, en noviembre aumenta un 1,5% y en diciembre baja un 3% ¿Cuál ha sido su variación total? Si la acción valía a principios de septiembre 84 €, ¿cuánto valdrá ahora?

HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 8
APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ECONOMÍA

1. ¿Cuántos intereses produce un capital de 1.800 € durante 6 meses al 4% anual? ¿Y durante 5 años? ¿Y durante 8 años y medio?

2. ¿Durante cuánto tiempo ha de estar un capital de 25.000 € al 5% anual para que se convierta en 30.000 €?

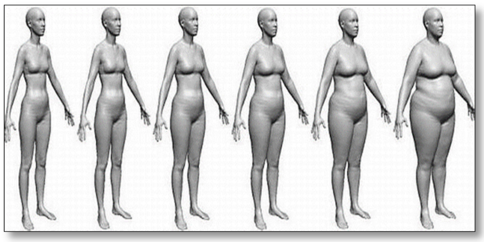
3. Un banco paga el 4% anual por el dinero depositado en una cuenta de ahorro. Un inversor pone 30.000 €. Al cabo del primer año deja el dinero y los intereses y además añade otros 15.000 €. ¿Cuánto dinero tendrá al acabar el segundo año?

4. Un banco ofrece un interés del 6,5 % anual por un depósito a plazo fijo. Un ahorrador deposita 25.000 € durante 5 años. ¿Cuánto dinero tendrá al finalizar este período?

5. Dos bancos ofrecen dos depósitos de ahorro diferentes: El banco A ofrece un depósito al 4,5% anual con períodos de capitalización mensuales durante un máximo de 5 años sin retirar el dinero. El banco B ofrece un depósito al 5% anual con períodos de capitalización trimestrales durante un máximo de 3 años sin retirar el dinero. Estás decidido a ahorrar 20.000 € y que te renten lo máximo posible. ¿Cuál de las dos ofertas elegirías? Justifica tu respuesta.

HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 9
LA PROPORCIONALIDAD EN LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

1. Se ha realizado un estudio del peso de 100 personas adultas de una determinada etnia. Se desea publicar estos datos en una página de una revista científica mediante en un histograma de manera que la altura máxima del gráfico sea de 10 cm y como anchura de cada intervalo 1,5 cm. Complete primero la siguiente tabla y a continuación dibuje el histograma con las medidas indicadas.

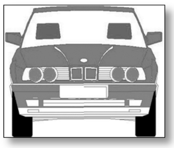


PESO *(kg)*	**MARCAS DE CLASE *(kg)***	**FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)**	**ALTURA (cm)**
[50, 60)	*55*	12	
[60, 70)	*65*	15	
[70, 80)	75	30	
[80, 90)	*85*	20	
[90, 100)	95	12	
[100, 110)	*105*	7	
[110, 120)	*115*	2	
	TOTAL	*100*	

2. Una empresa de servicios de telecomunicaciones ha realizado una encuesta entre sus clientes con el objetivo de conocer su opinión sobre el servicio de atención y resolución de incidencias. Se pide que dibuje un diagrama de sectores. Para ello complete primero la siguiente tabla:

CONCEPTOS DE LA ENCUESTA	PORCENTAJE	ÁNGULO DEL SECTOR
INMEJORABLE	1%	
BUENO	7%	
ACEPTABLE	45%	
REGULAR	38%	
MALO	6%	
INSUFICIENTE	3%	
TOTAL	*100%*	

3. Se ha realizado este año un estudio de las ventas de turismos en 4 países de la Unión Europea. Se pide que represente mediante un pictograma estadístico los datos de dicho estudio. Para ello deberá usar el siguiente pictograma (cuadrado) tomando como unidad de medida el cm:

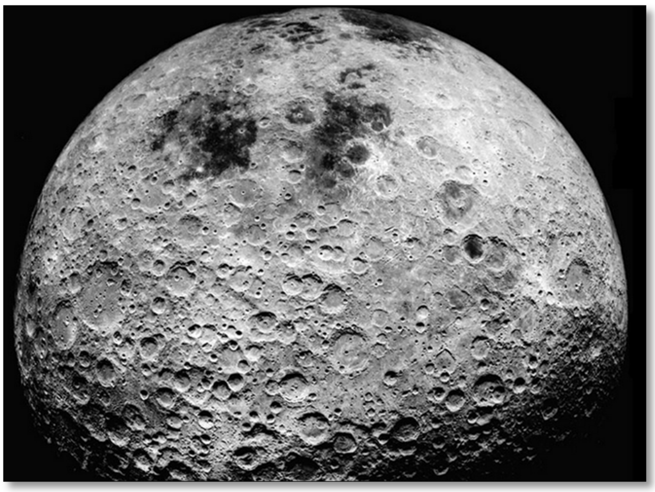


Antes deberá completar la siguiente tabla:

PAÍS	Nº DE TURISMOS VENDIDOS	ÁREA DEL OBJETO (cm^2)	LADO DEL CUADRADO (cm)
ESPAÑA	*854.521*		
FRANCIA	*1.845.623*		
PORTUGAL	*325.147*		
ALEMANIA	*3.654.845*		

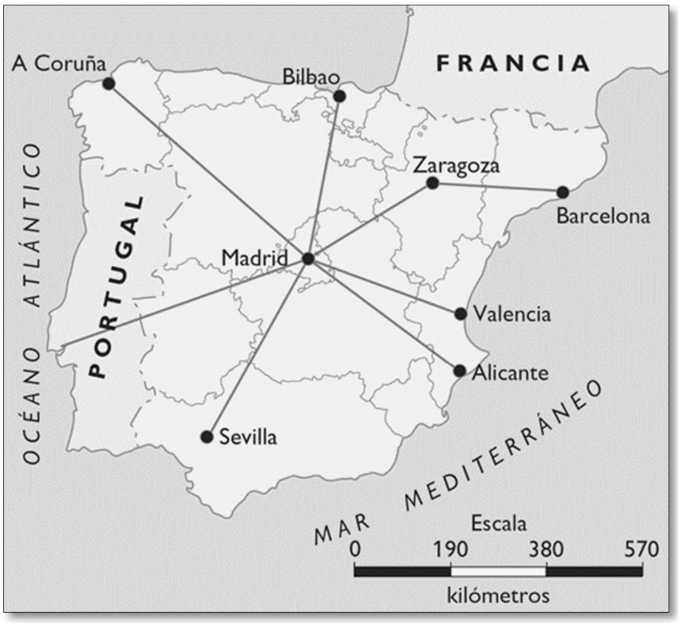
HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 10
APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA MEDIDA Y ESTIMACIÓN. LA ESCALA

1. Un grupo de biólogos recorren un lago y atrapan 85 truchas que posteriormente son marcadas y puestas de nuevo en libertad. Al cabo de unos días, vuelven a ese mismo lago y capturan 104 truchas, de las que 35 están marcadas. Estime el número total de truchas que hay en el lago.



2. Estime la superficie de 3 cráteres lunares sabiendo que el diámetro de la luna es de 3.474 km.

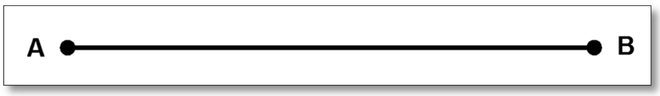
3. Con respecto al mapa que se muestra, responda a las siguientes preguntas: ¿Cuál es la escala del dibujo? ¿A cuántos kilómetros equivalen 3 cm? ¿Cuál es la distancia en línea recta de Madrid a Coruña?

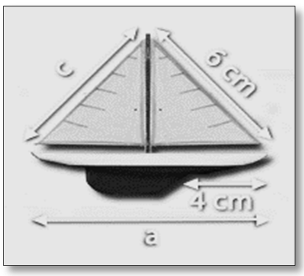


4. Intente estimar sin contarlos todos, el número de árboles que aparecen en esta fotografía aérea. Si la fotografía abarca aproximadamente un área de 100 m de largo por 80 m de ancho, ¿cuántos árboles de media habrá por cada m^2?

HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 11
APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA GEOMETRÍA

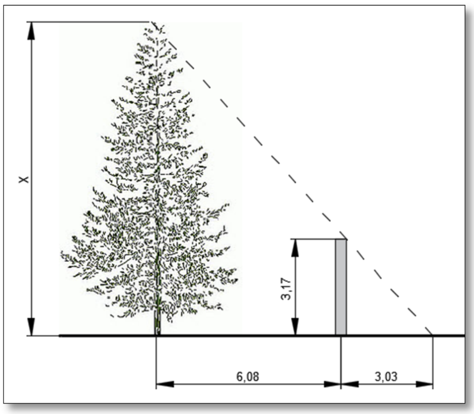
1. Se desea dividir un tramo recto de una carretera entre dos puntos en tres partes iguales. Utilice el teorema de Tales para realizar dicha división y dibuje el tramo con sus respectivas divisiones.



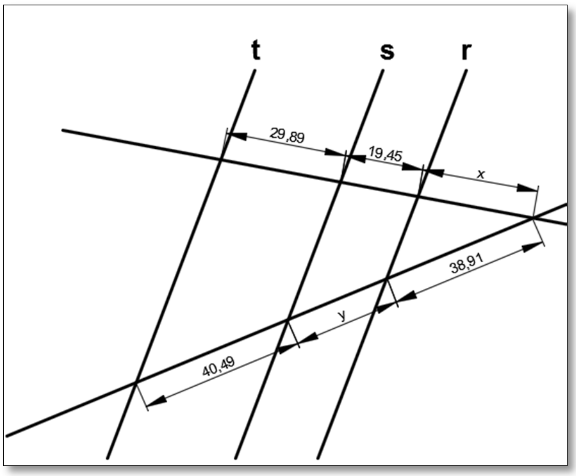


2. Una maqueta de barco usa dos cablecitos para tensar el mástil mayor, debiendo quedar como muestra la figura.
Calcula la distancia a la que debemos colocar el cable c.
¿Cuál debe ser la longitud de dicho cable?
¿Sabrías decir cuál es la altura del mástil?

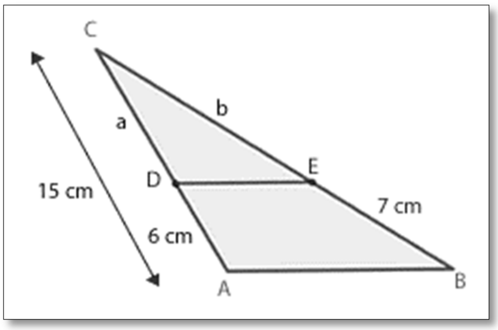
3. ¿Cuál es la altura del árbol si usted se encuentra a una distancia de 3,03 m de una valla que mide 3,17 m de altura y ésta se encuentra a 6,08 m de la base del tronco de dicho árbol?



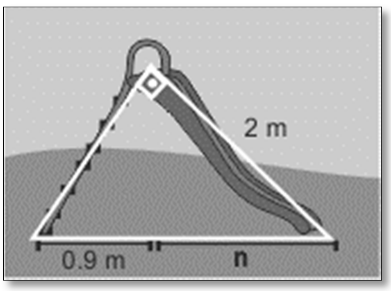
4. Sabiendo que las rectas *r, s, t* son paralelas. Calcule las longitudes *x* e *y* que faltan:



5. Sabiendo que el segmento *DE* es paralelo a la base del triángulo *ACB*. Calcule las dimensiones de los segmentos *a* y *b*.

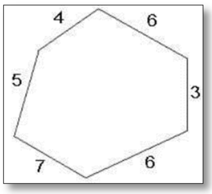


6. Observa el tobogán en el que juegan Lucía y Marcos. Calcula la medida del lado n. ¿Cuál es la altura del tobogán?

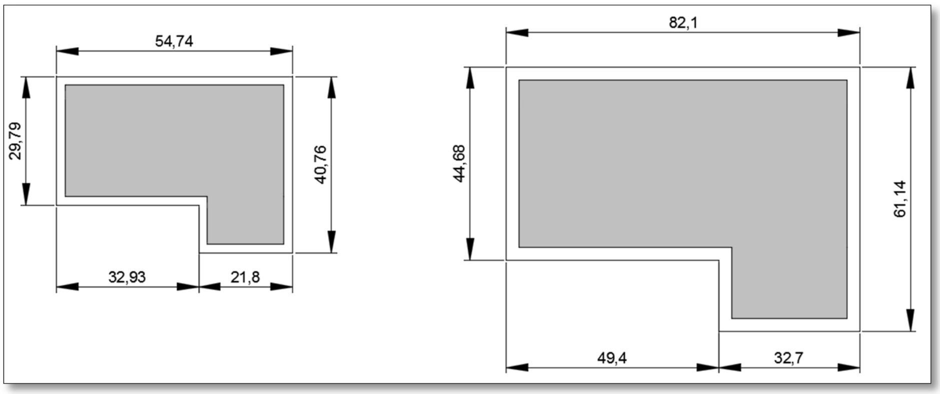


HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 12
ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS PROPORCIONALES

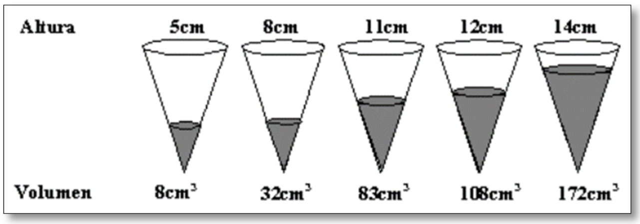
1. ¿Cuánto mide el perímetro de un área de terreno semejante a este si la razón de semejanza es 2/3?



2. ¿Es verdad que los lados de estas dos piscinas tienen la misma razón de semejanza? Si es así ¿cuál será la razón de semejanza de sus respectivas áreas?

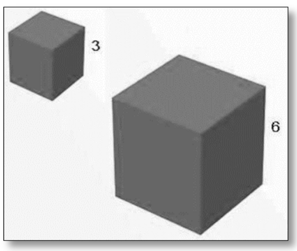


3. Vertemos diferentes cantidades de agua en un vaso cónico y en cada vertido medimos la altura del agua y su volumen. ¿Es el volumen directamente proporcional a la altura? Razona tu respuesta.

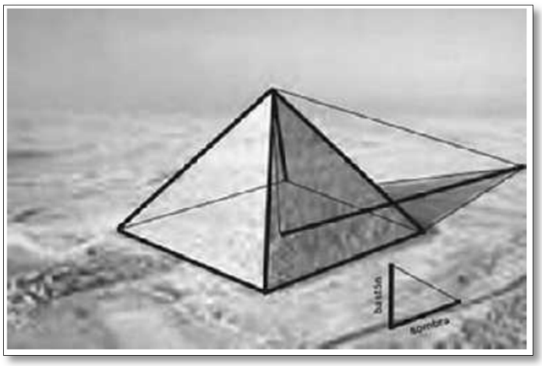


4. Una empresa fabrica bolas (esféricas) para rodamientos. Ahora necesita fabricar nuevas esferas de un volumen 1,5 veces mayor que las anteriores. Calcula la razón de semejanza entre los radios de ambas esferas.

5. Calcula la razón de semejanza entre los volúmenes de los cubos de la figura:

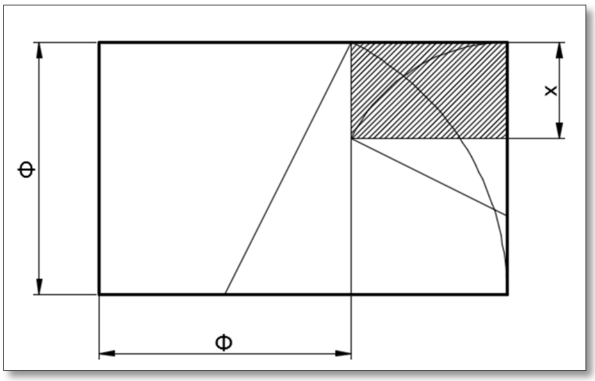


6. La pirámide de Keops tiene una base cuadrada de 230 metros de lado. Dice la leyenda que Tales midió su altura observando que la sombra proyectada por la pirámide era de 85 metros desde la base y colocando su bastón de 1,46 metros en el punto donde acababa la sombra, midió la que proyectaba el bastón, que era de 2 metros. ¿Qué altura tiene la pirámide?



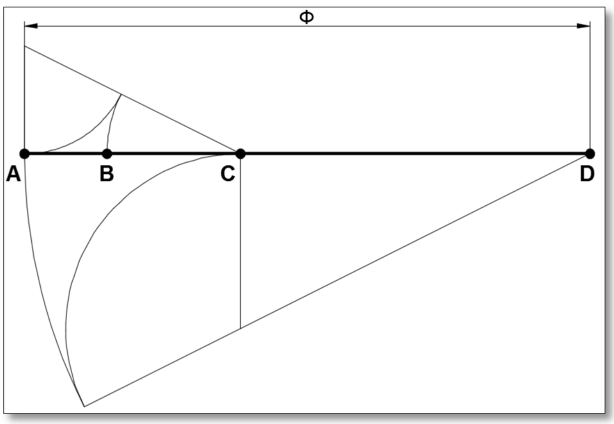
HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 13
LA PROPORCIÓN ÁUREA

1. La siguiente área se ha dividido conforme a la proporción áurea. ¿Cuánto valdrá x y el área sombreada en función de ϕ?

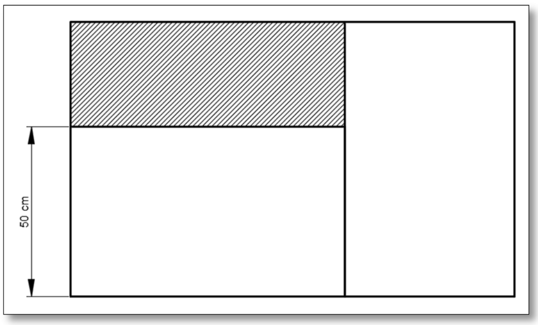


2. Dibuja un rectángulo áureo recíproco sabiendo que su diagonal mide 8 cm. ¿Cuáles son sus dimensiones? Calcula su área en mm^2.

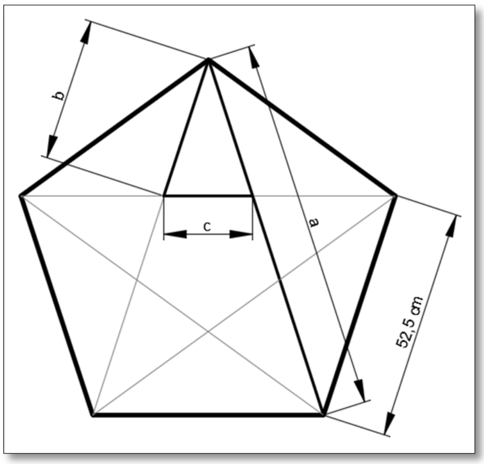
3. Los puntos A y B se han obtenido aplicando la proporción áurea. ¿Cuánto valen los segmentos AB, BC y CD en función de ϕ?



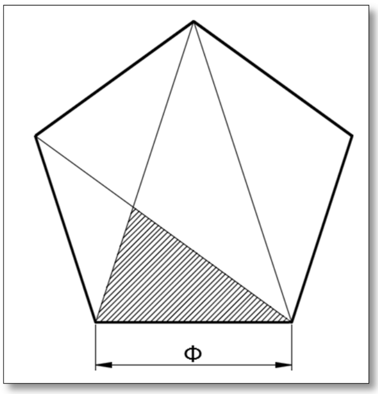
4. ¿Cuánto vale el área en cm² del rectángulo sombreado, sabiendo que los otros dos rectángulos son áureos?



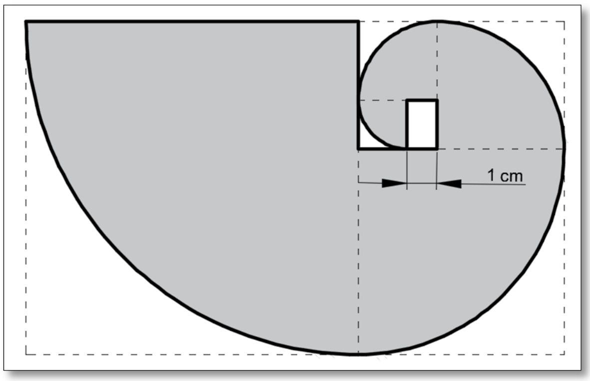
5. Dada la siguiente estrella pentagonal, caula la longitud de los segmentos *a, b, c* utilizando únicamente la proporción áurea.



6. Calcula el área sombreada en función de ϕ.



7. Calcula el área sombreada en cm² sabiendo que la figura se ha obtenido por medio de una espiral áurea.



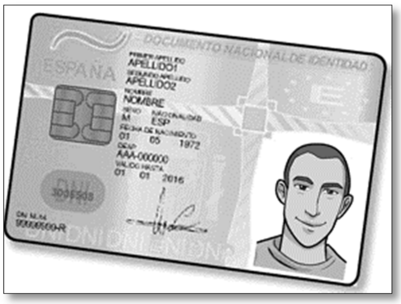
HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 14
LA PROPORCIONALIDAD EN LOS OBJETOS Y DISEÑOS DE LA VIDA COTIDIANA

1. Sabiendo que una hoja DIN A0 tiene una superficie de 1 m^2, calcula el área de una hoja DIN A4.

2. Calcula el largo y el ancho de un DIN A1 sabiendo que el área de un DIN A0 es de 1 m^2.

3. ¿Cuántos mm has de recortar el ancho de un papel DIN A3 para transformarlo en un DIN A3 de proporción áurea? ¿Qué área en mm^2 has quitado? Ahora parte por la mitad el nuevo papel y verifica si las dos partes tienen la misma proporción que el original.

4. Comprueba si estos objetos han sido diseñados conforme a la proporción áurea:

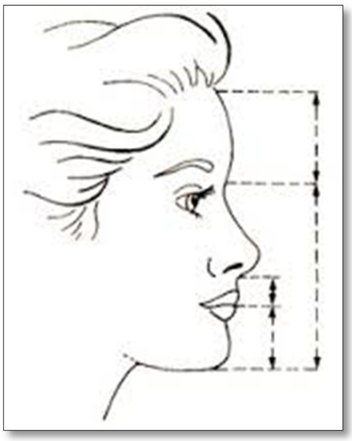





5. Comprueba si el siguiente logotipo ha sido diseñado conforme a la proporción áurea. Si es así, justifica tu respuesta.

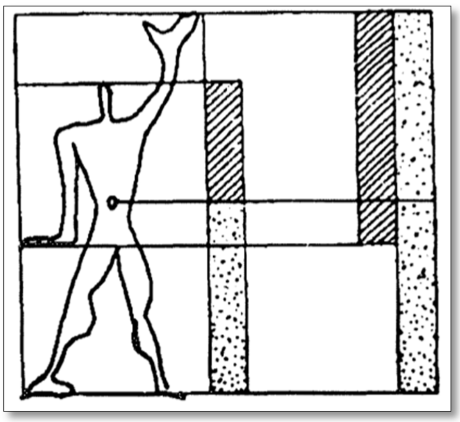
HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 15
LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA NATURALEZA

1. Identifique qué proporciones áureas existen en el rostro mostrado a continuación. Averigüe más de una relación como por ejemplo: la altura de la cara y la distancia de la barbilla a los ojos o la distancia de la barbilla a la nariz y la altura a la que está la unión de los dos labios. Justifique sus respuestas. Haga lo mismo para el caso de la oreja.



2. Identifique si existe proporción áurea entre algunos de los huesos de la mano. Razone sus respuestas.

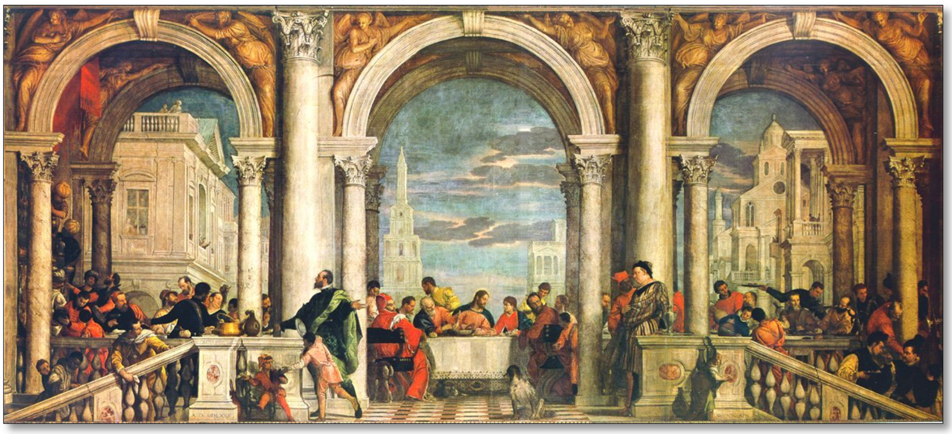
3. Identifique la presencia del número Φ en las partes sombreadas del Modulor de Le Corbusier.



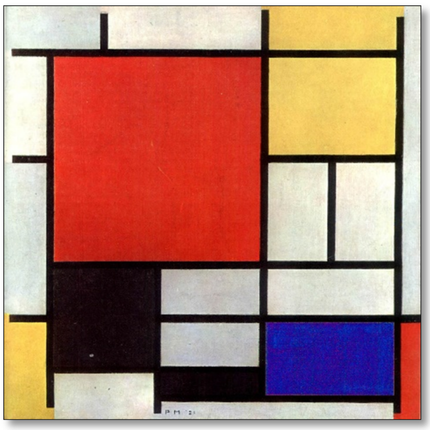
HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 16
LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE: PINTURA Y ESCULTURA

1. El Apoxiomeno es uno de los temas tradicionales y predilectos de la escultura de la Antigua Grecia que representa a un joven atleta, sorprendido limpiándose con un raspador el polvo, sudor y ungüento de su cuerpo con el pequeño instrumento curvo que los romanos llamaban estrígil. El Apoxiomeno más famoso de la Antigüedad clásica fue el bronce de Lisipo de Sición, el escultor de la corte de Alejandro Magno, que la realizó en el 330 a. C. Identifica las proporciones áureas de la escultura justificando tu respuesta. ¿A cuántas cabezas equivale la altura de la escultura?

2. El pintor manierista italiano Paolo Veronés (1528-1588) construye muchas veces sus retratos sobre el número áureo. En la "Comida en la casa de Leví", la arquitectura está regulada por la relación áurea. Identifica los puntos de intersección de las líneas que unen los puntos Φ entre sí y con los vértices del rectángulo y averigua si son los puntos que permiten la disposición de las columnas. Identifica las dos diagonales del rectángulo que dan las escaleras del primer plano.



3. Este cuadro del neoplasticista Piet Mondrian "La armonía perfecta" (1921), ha sido realizado conforme a proporciones áureas. Identifícalas justificando tus respuestas.



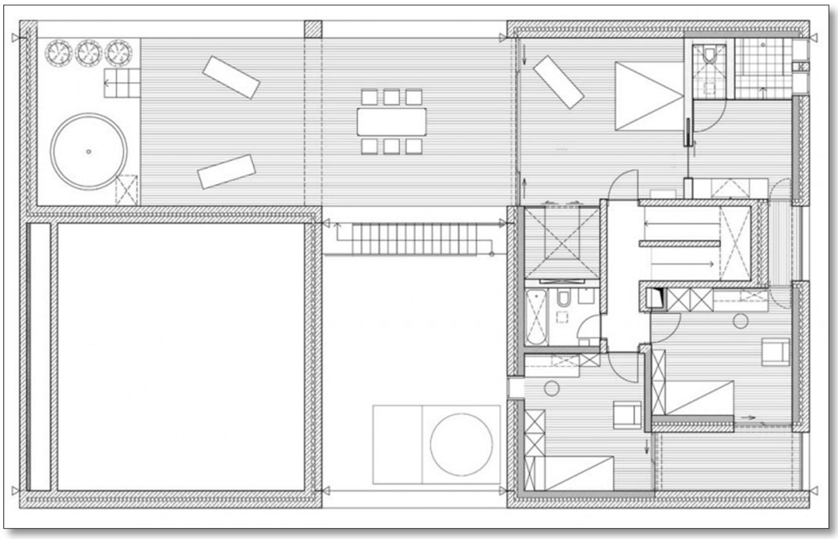
HOJA DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS 17
LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA

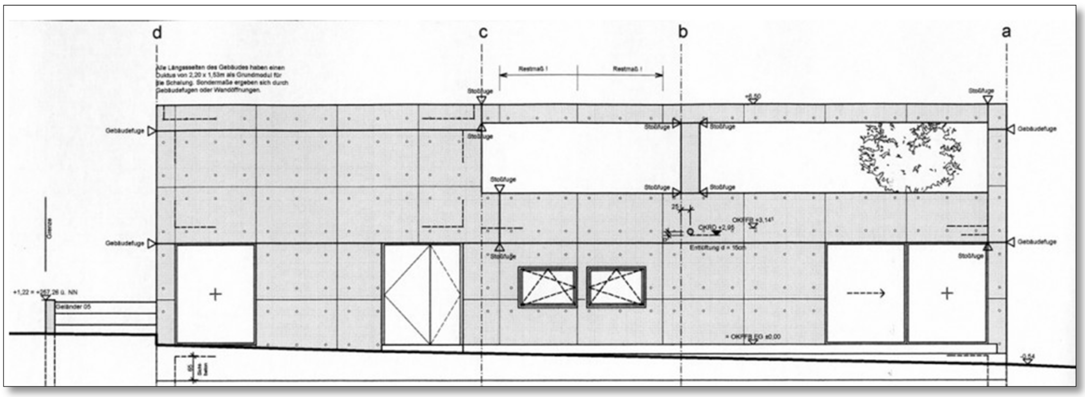
1. La colonia de Agrigento en Sicilia, vivió un momento de máximo esplendor antes su destrucción por parte de los cartagineses en el 406 a. C. Prueba de ello es este templo, El Templo de la Concordia de Agrigento que, tanto en el diseño de la planta, como en el alzado de la fachada, es un ejemplo de diseño realizado con la divina proporción. Averigua por qué.

2.La Catedral de Nuestra Señora (Cathédrale Notre Dame) es una iglesia de culto católico, sede episcopal de París, la capital de Francia. Se trata de uno de los edificios más primitivos de cuantos se construyeron en estilo Gótico. Se empezó su edificación en el año 1163 y se terminó en el año 1345. Es de uno de los monumentos más populares de la capital francesa. Notre Damme también posee las características del número áureo que le hace más armoniosa. Identifica estas características en la composición de su fachada principal justificando tu respuesta.

3. La torre Eiffel es una estructura de hierro diseñada por Maurice Koechlin y Émile Nouguier y construida por el ingeniero francés Gustave Eiffel y sus colaboradores para la Exposición universal de 1889 en París. Situada en el extremo del Campo de Marte a la orilla del río Sena, este monumento parisino, símbolo de Francia y su capital, es la estructura más alta de la ciudad y el monumento que cobra entrada más visitado del mundo. El número Φ también se encuentra en las proporciones de las diferentes partes de la torre, analiza la fotografía en busca de éstas.

4. Absalon es un proyecto desarrollado el año 2006 en Trier, Rheinland-Pfalz, Alemania, por Denzer & Poensgen, el proyecto se ha inspirado en las grandes artes. Las habitaciones al igual que las fachadas e interiores han sido diseñadas siguiendo la proporción áurea, resultando una obra con una belleza y equilibrio espectaculares. Identifique dichas proporciones tanto en uno de los alzados como en una de las plantas y justifique sus respuestas.





7.5. ANEXO V: PRUEBAS DE EVALUACIÓN MODELO PISA

PRUEBA DE EVALUACIÓN 1
LA PROPORCIONALIDAD EN LAS FUNCIONES Y GRÁFICAS

CONCENTRACIÓN DE UN FÁRMACO

A un paciente ingresado en un hospital le ponen a las 08:00 una inyección de un determinado fármaco. Su cuerpo va asimilándolo gradualmente de modo que, una hora después de la inyección, sólo el 60% de dicho fármaco permanece activo en su sangre. Esta pauta continúa: al final de cada hora sólo permanece activo el 60% del fármaco presente al final de la hora anterior.

Supón que al paciente se le han administrado a las 08:00 una dosis de 300 miligramos de dicho fármaco.

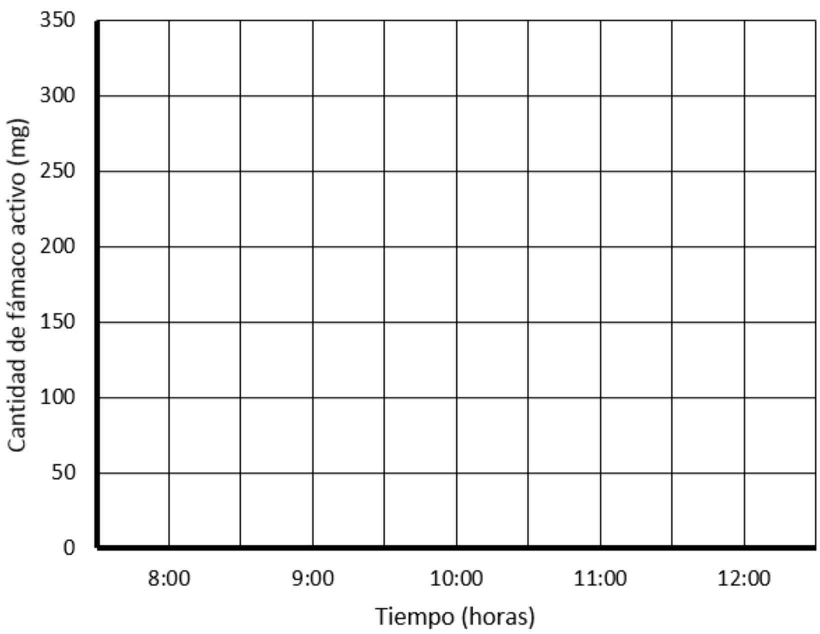
Pregunta 1

Completar la siguiente tabla anotando la cantidad de fármaco que permanecerá activo en la sangre del paciente en los siguientes intervalos de tiempo:

HORA	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00
FÁRMACO (mg)					

Pregunta 2

Elaborar un gráfico donde se muestre la cantidad de fármaco activo por cada hora. Para ello utiliza la siguiente plantilla:



Pregunta 3

¿Qué cantidad de fármaco permanece activa a las 09:30?

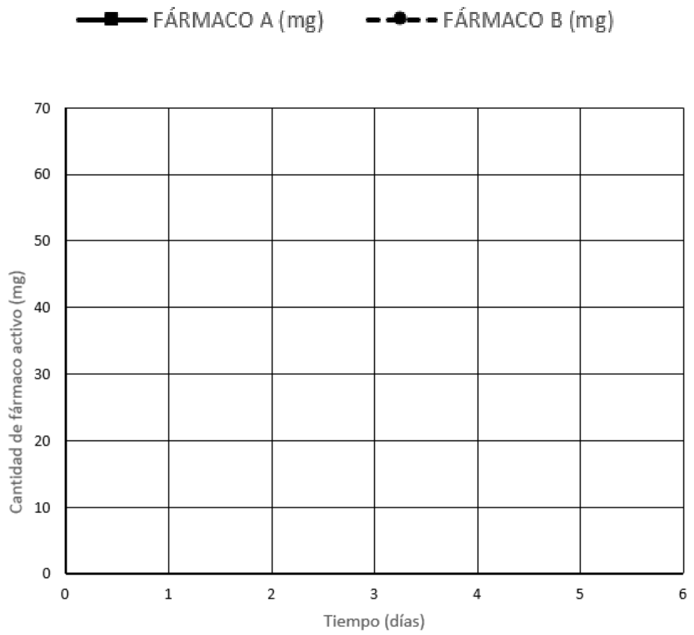
Pregunta 4

Pablo toma dos fármacos A y B. Del fármaco A toma 90 mg y del fármaco B toma 30 mg. Completar la siguiente tabla, sabiendo que las cantidades activas que permanecen en sangre de ambos fármacos son directamente proporcionales a los días transcurridos.

TIEMPO (días)	0	1	2	3	4	5	6
FÁRMACO A (mg)	60		30				
FÁRMACO B (mg)	30			15			

Pregunta 5

Elaborar un gráfico donde se muestre la cantidad de ambos fármacos activos por cada día. Para ello utiliza la siguiente plantilla:



Pregunta 6

¿Cuántos días han de pasar para que permanezca activa en sangre más cantidad del fármaco A que del fármaco B?

Pregunta 7

Indicar qué porcentaje de cada fármaco permanece activo transcurridos un día y medio.

RESPUESTAS Y CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Pregunta 1

Completar la siguiente tabla anotando la cantidad de fármaco que permanecerá activo en la sangre del paciente en los siguientes intervalos de tiempo:

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Máxima puntuación: Todas las entradas de la tabla son correctas.

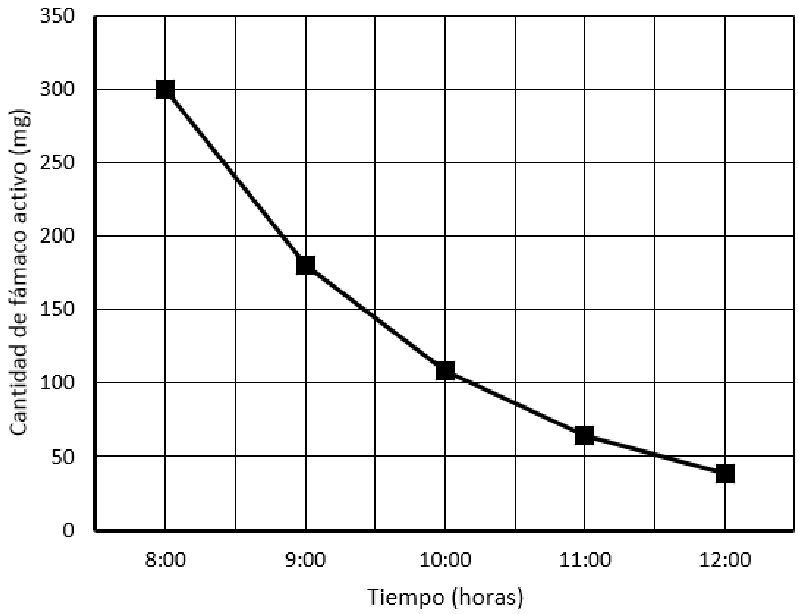
HORA	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00
FÁRMACO (mg)	300	180	108	64,8	38,88

Puntuación parcial: Al menos la mitad de las entradas de la tabla son correctas.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas donde los porcentajes estén presentes.

Pregunta 2
Elaborar un gráfico donde se muestre la cantidad de fármaco activo por cada hora. Para ello utiliza la siguiente plantilla:

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación: Representa el siguiente gráfico.



Puntuación parcial: Confunde en la escala la representación de uno o dos puntos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Representar gráficamente la relación de dos magnitudes en un diagrama cartesiano adecuándose a las escalas de los ejes.

Pregunta 3
¿Qué cantidad de fármaco permanece activa a las 09:30?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:

$$180 - \left(\frac{180 - 108}{2}\right) = 144\, mg$$

Puntuación parcial: Equivocarse en alguna operación simple, pero darse cuenta de la coherencia o incoherencia del resultado obtenido.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Saber interpolar entre los datos de un gráfico para obtener otros a partir de ese mismo gráfico.

Pregunta 4
Pablo toma dos fármacos A y B. Del fármaco A toma 90 mg y del fármaco B toma 30 mg. Completa la siguiente tabla, sabiendo que las cantidades activas que permanecen en sangre de ambos fármacos son directamente proporcionales a los días transcurridos.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación: Completa la tabla con los siguientes datos.

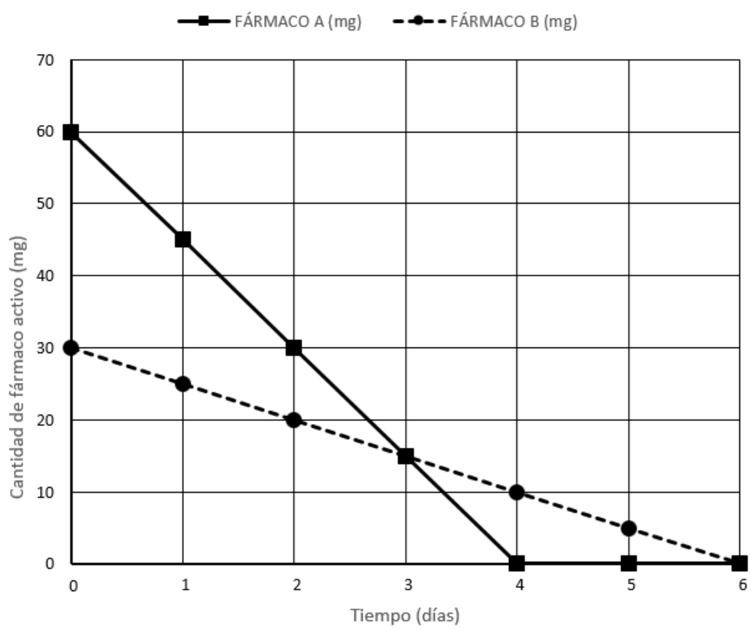
TIEMPO (días)	0	1	2	3	4	5	6
FÁRMACO A (mg)	60	45	30	15	0	0	0
FÁRMACO B (mg)	30	25	20	15	10	5	0

Puntuación parcial: Al menos la mitad de las entradas de la tabla son correctas.
Sin puntuación: Sin respuesta o contesta algo distinto.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Representar datos en forma de tabla. Identificar e interpretar relaciones de proporcionalidad directa o inversa entre magnitudes de la vida real. Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas donde la proporcionalidad esté presente.

Pregunta 5
Elaborar un gráfico donde se muestre la cantidad de ambos fármacos activos por cada día. Para ello utiliza la siguiente plantilla:

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:



Puntuación parcial: Se confunde en la escala o representación de uno o dos puntos pero reflexiona sobre la coherencia o incoherencia de lo representado.
Sin puntuación: Sin respuesta o contesta algo distinto.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Representar e interpretar gráficamente las relaciones de proporcionalidad directa o inversa entre dos o más magnitudes.

Pregunta 6
¿Cuántos días han de pasar para que permanezca activa en sangre más cantidad del fármaco A que del fármaco B?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación: 3 días.
Sin puntuación: No contesta o contesta algo distinto.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Interpretar gráficamente las relaciones de proporcionalidad directa o inversa entre dos o más magnitudes así como sacar conclusiones observando gráficas.

Pregunta 7
Indica qué porcentaje de cada fármaco permanece activo transcurridos un día y medio.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:
Fármaco A:

$$60 - \frac{1{,}5 \cdot (60 - 45)}{1} = 37{,}5\ mg$$

Fármaco B:

$$30 - \frac{1{,}5 \cdot (30 - 25)}{1} = 22{,}5\ mg$$

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación sencilla pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Utilizar las nociones aritméticas sobre la proporcionalidad. Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas donde la proporcionalidad esté presente.

PRUEBA DE EVALUACIÓN 2
LAS APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD A LOS PROBLEMAS DEL MUNDO FÍSICO

AGUA PARA REGADÍO

Una alberca para regadío contiene 50.000 litros de capacidad. Un agricultor saca agua de la alberca de forma constante a razón de 1000 litros por día. Otro agricultor saca agua a razón constante de 0,25 m^3 por hora. Por otro lado, la alberca dispone de una bomba de llenado, que entra en funcionamiento cuando un sensor detecta que se ha vaciado la mitad de su capacidad.

Pregunta 1

Suponiendo que la bomba de llenado no funcione, ¿cuánto tiempo tardarían ambos agricultores en agotar completamente el volumen de la alberca?

Pregunta 2

Supongamos que la alberca está al máximo de su capacidad y los dos agricultores comienzan a sacar agua a la vez. ¿Cuándo comenzará a funcionar la bomba de llenado de la alberca?

Pregunta 3

Poniéndonos en el caso anterior, si la bomba de llenado funcionara a razón constante de 10 litros por minuto. ¿En cuánto tiempo tardará en volverse a llenar la alberca completamente aun cuando los dos agricultores sigan sacando agua?

Pregunta 4

Supongamos que la alberca está llena y que un tercer agricultor comienza a sacar agua a razón constante de 100 litros por hora junto con los dos anteriores. ¿Cuánto tiempo tardará la alberca en alcanzar 2/3 de su capacidad?

Pregunta 5

Los agricultores que usan el agua de la alberca pondrán dinero entre todos de manera que cada uno pague una cantidad proporcional al consumo de agua que haga de la misma. Para cada una de las siguientes afirmaciones indicar si es correcta o incorrecta:

a) El agricultor que gaste más agua pagará más dinero que el que gaste menos agua.
b) Si se conocen los litros que gastan dos agricultores y lo que paga uno de ellos, entonces se puede calcular lo que paga el otro.
c) Si se conoce cuánto ha pagado cada agricultor se puede calcular el volumen de la alberca.
d) Si el precio por litro de agua se redujera un 10%, entonces cada uno de los agricultores pagaría un 10% menos.

Pregunta 6

Supongamos que el agricultor A y el agricultor B han pagado un total de 2.975 € y han consumido 1.000 m^3 y 2.500 m^3 respectivamente. ¿Cuánto pagará un tercer agricultor que consuma 1.750 m^3?

RESPUESTAS Y CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Pregunta 1

Suponiendo que la bomba de llenado no funcione, ¿cuánto tiempo tardarían ambos agricultores en agotar completamente el volumen de la alberca?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Máxima puntuación:

Un agricultor consume: $1.000\frac{l}{dia}$

El otro consume:

$$0{,}25\frac{m^3}{h}=\frac{250\ l}{\frac{1}{24}dias}=6.000\frac{l}{dia}$$

El tiempo que tardará será:

$$\frac{50.000\ l}{7.000\frac{l}{dia}}=7\ dias\ 3\ h\ 22\ min$$

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación sencilla o efectúa mal el cambio de unidades pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA

Competencia matemática: Plantear problemas utilizando las nociones aritméticas sobre la proporcionalidad. Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas donde la proporcionalidad esté presente.

Pregunta 2

Supongamos que la alberca está al máximo de su capacidad y los dos agricultores comienzan a sacar agua a la vez. ¿Cuándo comenzará a funcionar la bomba de llenado de la alberca?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Máxima puntuación:

Comenzará a funcionar cuando se haya vaciado la mitad del volumen de la alberca:

$$\frac{25.000\ l}{7.000\frac{l}{dia}}=3\ dias\ 13\ h\ 40\ min$$

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación sencilla o efectúa mal el cambio de unidades pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA

Competencia matemática: Plantear problemas utilizando las nociones aritméticas sobre la proporcionalidad. Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas donde la proporcionalidad esté presente.

Pregunta 3
Poniéndonos en el caso anterior, si la bomba de llenado funcionara a razón constante de 10 litros por minuto. ¿En cuánto tiempo tardará en volverse a llenar la alberca completamente aun cuando los dos agricultores sigan sacando agua?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:

$$10\frac{l}{min} = \frac{10\ l}{\frac{1}{1440}dias} = 14.400\ l/dia$$

La alberca se irá llenando a un caudal constante de:

$$14.400\frac{l}{dia} - 1.000\frac{l}{dia} - 6.000\frac{l}{dia} = 7.400\frac{l}{dia}$$

El volumen a llenar será de 25.000 l, por lo tanto:

$$\frac{25.000\ l}{7.400\frac{l}{dia}} = 3\ dias\ 9\ h\ 8\ min$$

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación sencilla o efectúa mal el cambio de unidades pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Plantear problemas utilizando las nociones aritméticas sobre la proporcionalidad. Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas donde la proporcionalidad esté presente.

Pregunta 4
Supongamos ahora que un tercer agricultor comienza a sacar agua a razón constante de 100 litros por hora junto con los dos anteriores. ¿Cuánto tiempo tardará la alberca en alcanzar 2/3 de su capacidad?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:

$$100\frac{l}{h} = \frac{100\ l}{\frac{1}{24}dia} = 2.400\frac{l}{dia}$$

2/3 de la capacidad equivale a agotar 1/3 del volumen:

$$\frac{1}{3}\cdot 50.000\ l = 16.666{,}67\ l$$

El ritmo al que se extrae agua de la alberca será:

$$1.000\frac{l}{dia} + 6.000\frac{l}{dia} + 2.400\frac{l}{dia} = 9.400\frac{l}{dia}$$

Por lo que tardará en alcanzar 2/3 de su capacidad en:

$$\frac{16.666{,}67\ l}{9.400\frac{l}{dia}} = 1\ dia\ 18\ h\ 28\ min$$

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación sencilla o efectúa mal el cambio de unidades pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Plantear problemas utilizando las nociones aritméticas sobre la proporcionalidad. Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas donde la proporcionalidad esté presente.

Pregunta 5
Los agricultores que usan el agua de la alberca pondrán dinero entre todos de manera que cada uno pague una cantidad proporcional al consumo de agua que haga de la misma. Para cada una de las siguientes afirmaciones indica si es correcta o incorrecta:

a) El agricultor que gaste más agua pagará más dinero que el que gaste menos agua.
b) Si se conocen los litros que gastan dos agricultores y lo que paga uno de ellos, entonces se puede calcular lo que paga el otro.
c) Si se conoce cuánto ha pagado cada agricultor se puede calcular el volumen de la alberca.
d) Si el precio por litro de agua se redujera un 10%, entonces cada uno de los agricultores pagaría un 10% menos.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación: Las respuestas (a) (b) y (d) son correctas.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Interpretar las relaciones entre magnitudes y la proporcionalidad así como los porcentajes. Identificar el número mínimo de datos necesarios para resolver problemas relacionados con la proporcionalidad.

Pregunta 6
Supongamos que el agricultor A y el agricultor B han pagado un total de 2.975 € y han consumido 1.000 m^3 y 2.500 m^3 respectivamente. ¿Cuánto pagará un tercer agricultor que consuma 1.750 m^3?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:
El precio unitario del m^3 será:

$$\frac{2.975\text{ €}}{1.000\, m^3 + 2.500\, m^3} = \frac{0{,}85\text{€}}{m^3}$$

El tercer agricultor tendrá que pagar:

$$1.750\, m^3 \cdot \frac{0{,}85\text{€}}{m^3} = 1.487{,}50\text{ €}$$

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación sencilla o efectúa mal el cambio de unidades pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Plantear problemas utilizando las nociones aritméticas sobre la proporcionalidad. Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas donde la proporcionalidad esté presente.

PRUEBA DE EVALUACIÓN 3
LAS APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD A LOS PROBLEMAS DEL MUNDO FÍSICO

FÁBRICA DE CAFÉS

Una fábrica compra 300 sacos de 50 kilos de un café a 10,50 €/Kg y 150 sacos de 40 kilos de otro café a 14 €/Kg, para mezclarlos posteriormente.

Pregunta 1

¿Qué porcentaje de cada café tendrá la mezcla?

Pregunta 2

Si después envasa la mezcla en bolsas de 400 gramos ¿Cuántas bolsas fabricará?

Pregunta 3

¿A qué precio deberá vender cada bolsa si desea ganar 1,50 céntimos de € por cada kilo?

Pregunta 4

Si el primer tipo de café contiene el 1% de cafeína, y el segundo tipo el 0,56% de cafeína, y la fábrica pretende comercializar bolsas de 500 gramos de café con un 0,65% de cafeína. ¿Cuál será el peso que tendrá que mezclar de ambos cafés para fabricar una de esas bolsas?

RESPUESTAS Y CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Pregunta 1

¿Qué porcentaje de cada café tendrá la mezcla?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:
Cantidad de café del primer tipo:

$$300\ sacos \cdot 50\ kg = 15.000\ kg$$

Cantidad de café del segundo tipo:

$$150\ sacos \cdot 40\ kg = 6.000\ kg$$

Total: 21.000 kg
% de café del primer tipo:

$$\frac{15.000\ kg}{21.000\ kg} \cdot 100 = 71{,}43\%$$

% de café del segundo tipo:

$$\frac{6.000\ kg}{21.000\ kg} \cdot 100 = 28{,}57\%$$

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación sencilla o efectúa mal el cambio de unidades pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Plantear problemas utilizando las nociones aritméticas sobre la proporcionalidad. Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas donde la proporcionalidad esté presente.

Pregunta 2
Si después envasa la mezcla en bolsas de 400 gramos ¿Cuántas bolsas fabricará?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:

$$\frac{21.000\ kg}{0{,}4\frac{kg}{bolsa}} = 52.500\ bolsas$$

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación sencilla o efectúa mal el cambio de unidades pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Plantear problemas utilizando las nociones aritméticas sobre la proporcionalidad. Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas donde la proporcionalidad esté presente.

Pregunta 3
¿A qué precio deberá vender cada bolsa si desea ganar 1,50 céntimos de € por cada kilo?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:
Precio del café del primer tipo:

$$15.000\ kg \cdot 10{,}50\frac{€}{kg} = 157.500\ €$$

Precio del café del segundo tipo:

$$6.000\ kg \cdot 14\frac{€}{kg} = 84.000\ €$$

Precio unitario de la mezcla:

$$\frac{157.500\ € + 84.000\ €}{21.000\ kg} = 11{,}50\frac{€}{kg}$$

Ganancia:

$$0{,}015\frac{€}{kg} + 11{,}50\frac{€}{kg} = 11{,}515\frac{€}{kg}$$

Precio de una bolsa:

$$11{,}515\frac{€}{kg} \cdot 0{,}4\ kg = 4{,}61\frac{€}{bolsa}$$

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación sencilla o efectúa mal el cambio de unidades pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Plantear problemas utilizando las nociones aritméticas sobre la proporcionalidad. Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas donde la proporcionalidad esté presente.

Pregunta 4

Si el primer tipo de café contiene el 1% de cafeína, y el segundo tipo el 0,56% de cafeína, y la fábrica pretende comercializar bolsas de 500 gramos de café con un 0,65% de cafeína. ¿Cuál será el peso que tendrá que mezclar de ambos cafés para fabricar una de esas bolsas?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Máxima puntuación:

Gramos de café con el 1% de cafeína: A

Gramos de café con el 0,56% de cafeína: B

$$\begin{cases} 500\ g = A + B \\ 1\%A + 0{,}56\%B = 0{,}65\% \cdot 500\ g \end{cases}$$

A = 102,27 gramos.

B = 397,73 gramos.

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación sencilla o efectúa mal el cambio de unidades pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.

Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA

Competencia matemática: Plantear problemas utilizando nociones algebraicas. Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas donde la proporcionalidad y los porcentajes estén presentes.

PRUEBA DE EVALUACIÓN 4
APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA ECONOMÍA

DEPÓSITO BANCARIO

Un banco oferta a sus clientes un interesante depósito a un interés del 4% anual con períodos de capitalización mensuales. El plazo máximo en el que podrán tener el depósito será de 4 años. Juan decide abrir uno con 15.000 € pero irá retirando los beneficios cada mes. Marta abre otro depósito con la misma cantidad que Juan, pero decide no retirar los beneficios dando la orden al banco de reinvertirlos en dicho depósito.

Pregunta 1

Tanto Juan como Marta deciden mantener el depósito durante 30 meses. ¿Cuál será la diferencia entre los beneficios obtenidos por cada uno?

Pregunta 2

Si ambos deciden mantener el depósito abierto durante el plazo máximo. ¿Qué porcentaje de beneficios habrá obtenido cada uno?

Pregunta 3

Supongamos que al cabo de un año y medio, Marta ingresa en el depósito 10.000 € más, pero 15 meses antes de cumplir el plazo máximo de los 4 años saca 20.000 €. ¿Cuánto dinero tendrá al finalizar el plazo?

Pregunta 4

Marta encuentra otro banco que ofrece un depósito al 4,25% anual con períodos de capitalización trimestrales durante un período obligatorio de 4 años, con una penalización por cancelación anticipada del 25% de los beneficios generados (es decir, que si Marta decide cancelar el depósito antes de vencer los 4 años, el banco se quedará con el 25% de los beneficios que haya obtenido hasta la fecha). Marta decide ingresar esos 15.000 €, pero al cabo de 3 años y medio decide cancelarlo. ¿Cuánto beneficio le habrá generado dicho depósito?

RESPUESTAS Y CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Pregunta 1

Tanto Juan como Marta deciden mantener el depósito durante 30 meses. ¿Cuál será la diferencia entre los beneficios obtenidos por cada uno?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Máxima puntuación:

Marta:

$$15.000\left(1+\frac{4}{1200}\right)^{30} = 15.000(1{,}0033)^{30} = 16.574{,}81€$$

Beneficios de 16.574-15.000=1.574,81€

Juan:

Beneficios en un mes:

$$15.000\frac{4}{1.200} = 50€$$

En 30 meses: 50·30=1.500€
Marta tiene 1.574,81-1.500=74,81€ más que Juan.
Puntuación parcial: Se equivoca en alguna suma, resta, multiplicación o división. Pero sabe identificar si los resultados son o no coherentes.
Sin puntuación: No contesta o responde algo completamente distinto.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas económicos relacionados con el interés simple y compuesto.

Pregunta 2
Si ambos deciden mantener el depósito abierto durante el plazo máximo. ¿Qué porcentaje de beneficios habrá obtenido cada uno?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:
Marta:

$$15.000(1{,}0033)^{48} = 17.569{,}94€$$

Beneficios de 17.569,48-15.000=2.569,48€

$$\frac{2.569{,}94}{15.000}100 = 17{,}13\%$$

Juan:
En 48 meses: 50·48=2.400€ de beneficio.

$$\frac{2.400}{15.000}100 = 16\%$$

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna suma, resta, multiplicación o división. Pero sabe identificar si los resultados son o no coherentes.
Sin puntuación: No contesta o responde algo completamente distinto.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas económicos relacionados con el interés simple y compuesto así como las relaciones porcentuales.

Pregunta 3
Supongamos que al cabo de un año y medio, Marta ingresa en el depósito 10.000 € más, pero 15 meses antes de cumplir el plazo máximo de los 4 años saca 20.000 €. ¿Cuánto dinero tendrá al finalizar el plazo?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:

$$15.000(1{,}0033)^{18} = 15.916{,}44€$$

$$15.916{,}44 + 10.000 = 25.916{,}44€$$

$$25.616{,}44(1{,}0033)^{48-18-15} = 25.616{,}44(1{,}0033)^{15} = 27.229{,}37€$$

$$27.229{,}37 - 20.000 = 7.229{,}37€$$

$$7.229{,}37(1{,}0033)^{15} = 7.595{,}61€$$

Total: 7.595,61+20.000=27.595,61€
Puntuación parcial: Se equivoca en alguna suma, resta, multiplicación o división. Pero sabe identificar si los resultados son o no coherentes.
Sin puntuación: No contesta o responde algo completamente distinto.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas económicos relacionados con el interés compuesto.

Pregunta 4
Marta encuentra otro banco que ofrece un depósito al 4,25% anual con períodos de capitalización trimestrales durante un período obligatorio de 4 años, con una penalización por cancelación anticipada del 25% de los beneficios generados (es decir, que si Marta decide cancelar el depósito antes de vencer los 4 años, el banco se quedará con el 25% de los beneficios que haya obtenido hasta la fecha). Marta decide ingresar esos 15.000 €, pero al cabo de 3 años y medio decide cancelarlo. ¿Cuánto beneficio le habrá generado dicho depósito?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:
$$15.000\left(1+\frac{4,25}{400}\right)^{14} = 15.000(1,0106)^{14} = 17.392,09€$$
Beneficios: 17.392,09-15.000=2.392,09€
Por cancelación: 75% de 2.392,09=1.794,07€ serán los beneficios finales obtenidos.
Puntuación parcial: Se equivoca en alguna suma, resta, multiplicación o división. Pero sabe identificar si los resultados son o no coherentes.
Sin puntuación: No contesta o responde algo completamente distinto.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Dominar los conceptos y técnicas para resolver problemas económicos relacionados con el interés compuesto así como las relaciones porcentuales.

PRUEBA DE EVALUACIÓN 5
LA PROPORCIONALIDAD EN LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

LOS NIVELES DE CO_2

Muchos científicos temen que el aumento del nivel de gas CO_2 en nuestra atmósfera esté causando un cambio climático.

En la tabla siguiente se muestran los niveles de emisión de CO_2 (en millones de toneladas) en 1990 y en 1998 de varios países: EEUU, Rusia, Japón, Canadá, Australia, Alemania y Países Bajos, así como de una región: Unión Europea. (Ten en cuenta que tanto Alemania como los Países Bajos forman parte de la Unión Europea).

PAÍS O REGIÓN	EMISIONES DE CO2 EN 1990	EMISIONES DE CO2 EN 1998
EEUU	6.049	6.727
RUSIA	3.040	1.962
JAPÓN	1.213	1.331
CANADÁ	612	692
AUSTRALIA	423	485
UNIÓN EUROPEA	4.208	4.041
ALEMANIA	1.209	1.020
PAÍSES BAJOS	218	236

Pregunta 1

Elaborar un gráfico de barras donde se muestre a escala los niveles de emisión de CO_2 tanto en 1990 como en 1998. Sobre cada barra debes indicar el dato proporcionado por la tabla. Básate en la siguiente plantilla y utiliza la siguiente leyenda:

■ Emisiones en 1990 (millones de toneladas de CO2)
■ Emisiones en 1998 (millones de toneladas de CO2)

Pregunta 2

Completar la siguiente tabla indicando el porcentaje de cambio en los niveles de emisión de CO_2 entre 1990 y 1998.

PAÍS O REGIÓN	EMISIONES DE CO2 EN 1990	EMISIONES DE CO2 EN 1998	% DE CAMBIO EN LOS NIVELES DE EMISIÓN
EEUU	6.049	6.727	
RUSIA	3.040	1.962	
JAPÓN	1.213	1.331	
CANADÁ	612	692	
AUSTRALIA	423	485	
UNIÓN EUROPEA	4.208	4.041	
ALEMANIA	1.209	1.020	
PAÍSES BAJOS	218	236	

Pregunta 3

Elaborar un gráfico de barras donde se muestre a escala el porcentaje de cambio en los niveles de emisión de CO_2 desde 1990 hasta 1998. Sobre cada barra debes indicar el porcentaje correspondiente. Básate en la siguiente plantilla:

Pregunta 4

Luisa analizó posteriormente tu gráfico de porcentajes y afirmó que había descubierto un error en el porcentaje de cambio de los niveles de emisión: "El descenso del porcentaje de emisión en Alemania es mayor que el descenso del porcentaje de emisión en toda la Unión Europea. Esto no es posible, ya que Alemania forma parte de la Unión Europea".

¿Estás de acuerdo con Luisa cuando dice que esto no es posible? Da una explicación que justifique tu respuesta.

Pregunta 5

Luisa y Antonio discuten sobre qué país (o región) tuvo el mayor aumento en emisiones de CO_2. Cada uno llega a conclusiones diferentes basándose en el diagrama que tú has dibujado anteriormente.

Dar dos posibles respuestas "correctas" a esta pregunta y explicar cómo se puede obtener cada una de estas respuestas.

RESPUESTAS Y CRITERIOS DE CORRECCIÓN

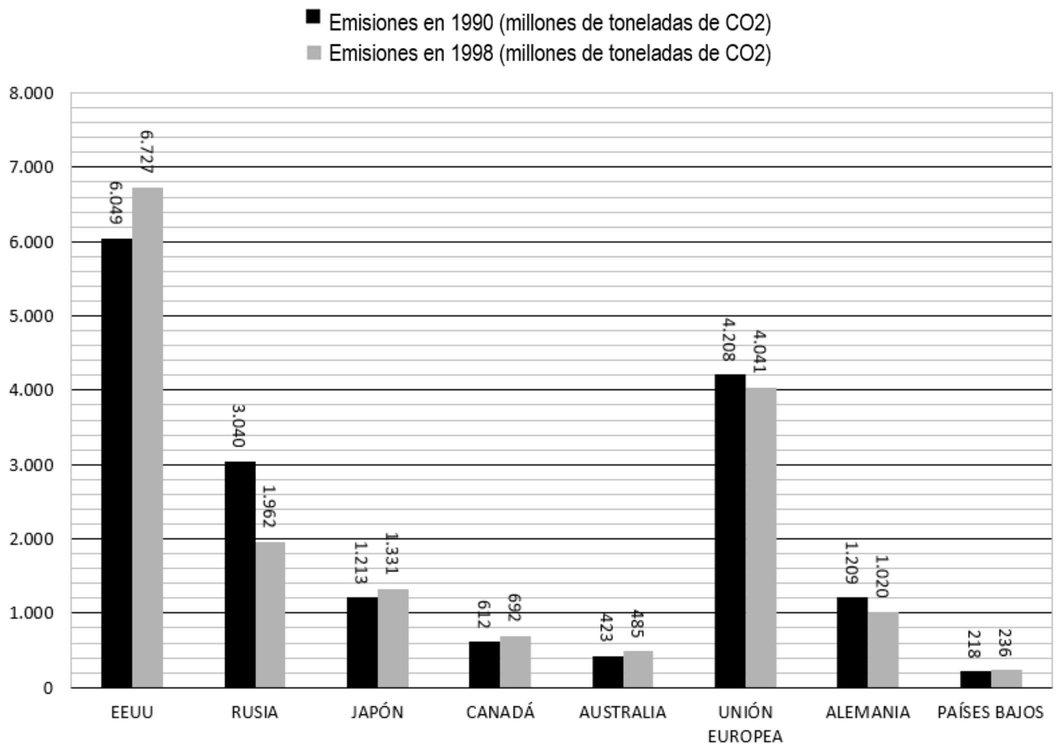
Pregunta 1

Elaborar un gráfico de barras donde se muestre a escala los niveles de emisión de CO_2 tanto en 1990 como en 1998. Sobre cada barra debes indicar el dato proporcionado por la tabla. Básate en la siguiente plantilla y utiliza la siguiente leyenda:

■ Emisiones en 1990 (millones de toneladas de CO2)
■ Emisiones en 1998 (millones de toneladas de CO2)

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Máxima puntuación:
Representa correctamente a escala las barras correspondientes a los niveles de emisión de cada país o región identificando cada color con el año concreto y poniendo los valores correspondientes sobre cada barra del histograma.



Puntuación parcial: Comete un error de escala en las barras pero las dibuja de forma proporcionada, o no identifica correctamente los colores con los años o no pone las cantidades sobre cada barra.
Sin puntuación: Otras respuestas en las que no incluyan correctamente la escala de las barras o no identifique que cada país debe tener dos barras correspondientes a los datos de los dos años indicados. Sin respuesta.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA

Competencia matemática: Representar gráficamente de forma proporcional datos y magnitudes.

Pregunta 2

Completar la siguiente tabla indicando el porcentaje de cambio en los niveles de emisión de CO_2 entre 1990 y 1998.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:
Calcula correctamente los porcentajes:
Por ejemplo, EEUU: $\left(\frac{6.727-6.049}{6.049}\right) \cdot 100 = 11\%$

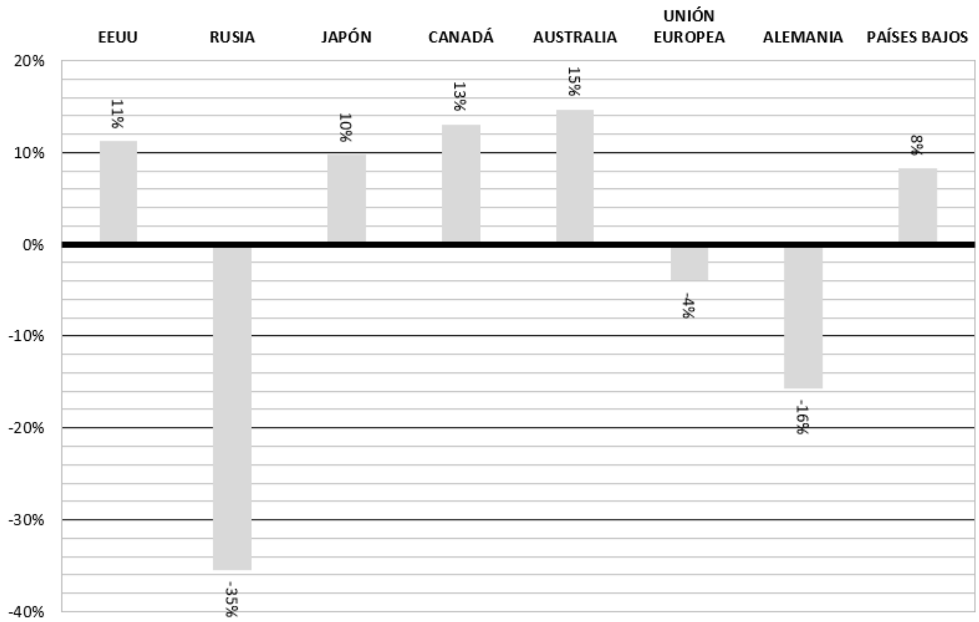
PAÍS O REGIÓN	EMISIONES DE CO2 EN 1990	EMISIONES DE CO2 EN 1998	% DE CAMBIO EN LOS NIVELES DE EMISIÓN
EEUU	6.049	6.727	11%
RUSIA	3.040	1.962	-35%
JAPÓN	1.213	1.331	10%
CANADÁ	612	692	13%
AUSTRALIA	423	485	15%
UNIÓN EUROPEA	4.208	4.041	-4%
ALEMANIA	1.209	1.020	-16%
PAÍSES BAJOS	218	236	8%

Puntuación parcial: Comete un error en alguna resta, multiplicación o división.
Sin puntuación: No contesta o se equivoca en todos los porcentajes.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Dominar los conceptos y técnicas de cálculo de porcentajes.

Pregunta 3
Elaborar un gráfico de barras donde se muestre a escala el porcentaje de cambio en los niveles de emisión de CO2 desde 1990 hasta 1998. Sobre cada barra debes indicar el porcentaje correspondiente. Básate en la siguiente plantilla:

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:
Representa correctamente las barras de porcentajes proporcional a cada cantidad y con la orientación correcta (positiva o negativa).



Puntuación parcial: No adecúa correctamente la escala de alguna de las barras de porcentajes u omite poner las cantidades sobre cada barra.
Sin puntuación: No contesta o representa fuera de escala todas las barras o bien omite el sentido positivo o negativo de las mismas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Representar gráficamente de forma proporcional datos y magnitudes.

Pregunta 4
Luisa analizó posteriormente tu gráfico de porcentajes y afirmó que había descubierto un error en el porcentaje de cambio de los niveles de emisión: "El descenso del porcentaje de emisión en Alemania es mayor que el descenso del porcentaje de emisión en toda la Unión Europea. Esto no es posible, ya que Alemania forma parte de la Unión Europea".
¿Estás de acuerdo con Luisa cuando dice que esto no es posible? Da una explicación que justifique tu respuesta.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación: No, con una explicación correcta. No, otros países de la UE pueden haberlo aumentado, como por ejemplo los Países Bajos, de tal modo que el descenso total en la UE puede ser menor que el descenso en Alemania.
Sin puntuación: Otras respuestas o sin respuesta.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Interpretar y entender gráficos de datos y magnitudes proporcionales y basar y/o sustentar argumentaciones en dichos datos.

Pregunta 5
Luisa y Antonio discuten sobre qué país (o región) tuvo el mayor aumento en emisiones de CO2. Cada uno llega a conclusiones diferentes basándose en el diagrama que tú has dibujado anteriormente.
Dar dos posibles respuestas "correctas" a esta pregunta y explicar cómo se puede obtener cada una de estas respuestas.

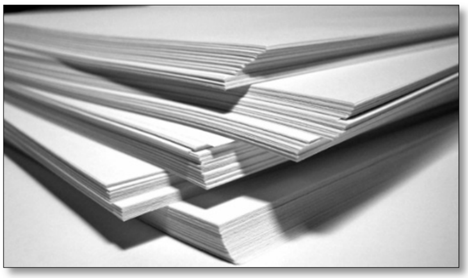
CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:
La contestación identifica las dos aproximaciones matemáticas al problema (el aumento absoluto más grande y el aumento relativo más grande) y nombra EEUU y Australia.
EEUU tiene el aumento más grande en millones de toneladas y Australia tiene el aumento más grande en porcentaje.
Puntuación parcial: La respuesta identifica o se refiere a los aumentos absolutos más grandes y a los aumentos relativos más grandes a la vez, pero los países no han sido identificados, o se nombran países equivocados.
Rusia tuvo el mayor aumento en el total de CO_2 (1078 toneladas), pero Australia tuvo el mayor aumento en el porcentaje (15%).
Sin puntuación: Otras respuestas o sin respuesta.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Reflexiona sobre las relaciones de aumento o disminuciones porcentuales que se dan entre un conjunto de datos.

PRUEBA DE EVALUACIÓN 6
PROPORCIONALIDAD EN LOS OBJETOS Y DISEÑOS DE LA VIDA COTIDIANA

PAPEL

Una papelería necesita 100 hojas de tamaño DIN A5 para imprimir y encuadernar un encargo de un cliente. Lamentablemente se ha quedado sin este tipo de papel, pero en su reserva cuenta con papeles de tamaño DIN A1.



Pregunta 1

¿Cuántos papeles DIN A1 se necesitarán para para obtener las 100 hojas DIN A5?

Pregunta 2

Conociendo que el área de un DIN A0 es de 1 m^2. Calcular el largo y el ancho en mm que tendrá un DIN A5.

Pregunta 3

Para un encargo especial, el cliente pide un cartel de tamaño DIN A1 pero de proporción áurea. ¿Qué área en mm^2 se ha de recortar a este papel para transformarlo en un rectángulo áureo?

Pregunta 4

Señalar la o las afirmaciones correctas en relación a los papeles de la norma DIN.

a) Que el largo y ancho de los papeles cumplen la proporción áurea.
b) Que al dividir un papel por la mitad, los dos resultan tener la misma proporción que el original.
c) Que todos tienen el área proporcional a $\sqrt{2}$.
d) Que se pueden doblar por la mitad para obtener dos papeles cuadrados.

RESPUESTAS Y CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Pregunta 1
¿Cuántos papeles DIN A1 se necesitarán para para obtener las 100 hojas DIN A5?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:

$$1\ DIN\ A1 = 16\ DIN\ A5$$

Sin puntuación: Sin respuesta u otras contestaciones.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Razonar y comprender las relaciones especiales de proporcionalidad en los objetos de la realidad.

Pregunta 2
Conociendo que el área de un DIN A0 es de 1 m^2. Calcular el largo y el ancho en mm que tendrá un DIN A5.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:

$$1\ DIN\ A0 = 32\ DIN\ A5$$

$$Área\ DIN\ A5 = \frac{1}{32} Área\ DIN\ A0 = \frac{1}{32} m^2$$

$$\begin{cases} Largo \cdot Ancho = \dfrac{1}{32} \\ Largo = \sqrt{2} \cdot Ancho \end{cases}$$

Ancho = 148 mm
Largo = 209 mm
Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación aritmética sencilla pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Plantear problemas de proporcionalidad geométrica utilizando las nociones algebraicas.

Pregunta 3
Para un encargo especial, el cliente pide un cartel de tamaño DIN A1 pero de proporción áurea. ¿Qué área en mm^2 se ha de recortar a este papel para transformarlo en un rectángulo áureo?

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:

$$Área\ DIN\ A1 = 0{,}5\ m^2$$

$$\begin{cases} Largo \cdot Ancho = 0{,}5 \\ Largo = \sqrt{2} \cdot Ancho \end{cases}$$

Largo = 841 mm ; Ancho = 594 mm
Ancho a recortar si está en proporción áurea:

$$\frac{841}{Ancho\ áureo} = \Phi \Rightarrow Ancho\ áureo = 519\ mm$$

Ancho a recortar = 594 – 519 = 75 mm
Área a recortar = 75·841 = 63.075 mm^2
Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación aritmética sencilla pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Plantear problemas de proporcionalidad geométrica utilizando las nociones algebraicas y las nociones sobre proporcionalidad áurea.

Pregunta 4
Señalar la o las afirmaciones correctas en relación a los papeles de la norma DIN.

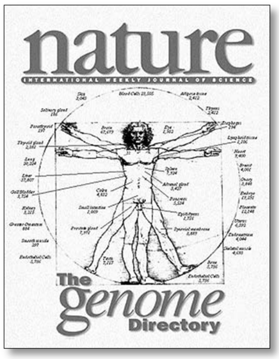
a) Que el largo y ancho de los papeles cumplen la proporción áurea.
b) Que al dividir un papel por la mitad, los dos resultan tener la misma proporción que el original.
c) Que todos tienen el área proporcional a $\sqrt{2}$.
d) Que se pueden doblar por la mitad para obtener dos papeles cuadrados.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación: Respuesta correcta (b).
Sin puntuación: No contesta o elige otra opción distinta a la (b).

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Interpretar las relaciones especiales de proporcionalidad en los objetos de la realidad.

PRUEBA DE EVALUACIÓN 7
LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA NATURALEZA

BELLEZA Y PROPORCIÓN



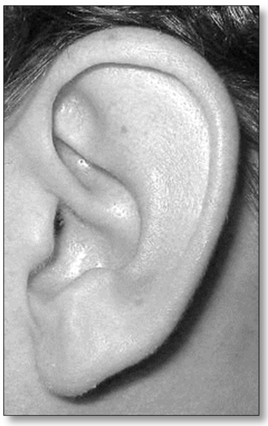
Un estudio para una prestigiosa revista científica pretende relacionar la belleza con la proporción áurea. Para ello se estudiarán una serie partes del cuerpo humano.

Pregunta 1

Identificar qué proporciones áureas tiene el rostro mostrado a continuación y justificar gráficamente las respuestas. Averiguar más de una relación como por ejemplo: la altura de la cara y la distancia de la barbilla a los ojos o la distancia de la barbilla a la nariz y la altura a la que está la unión de los dos labios. Justificar las respuestas.

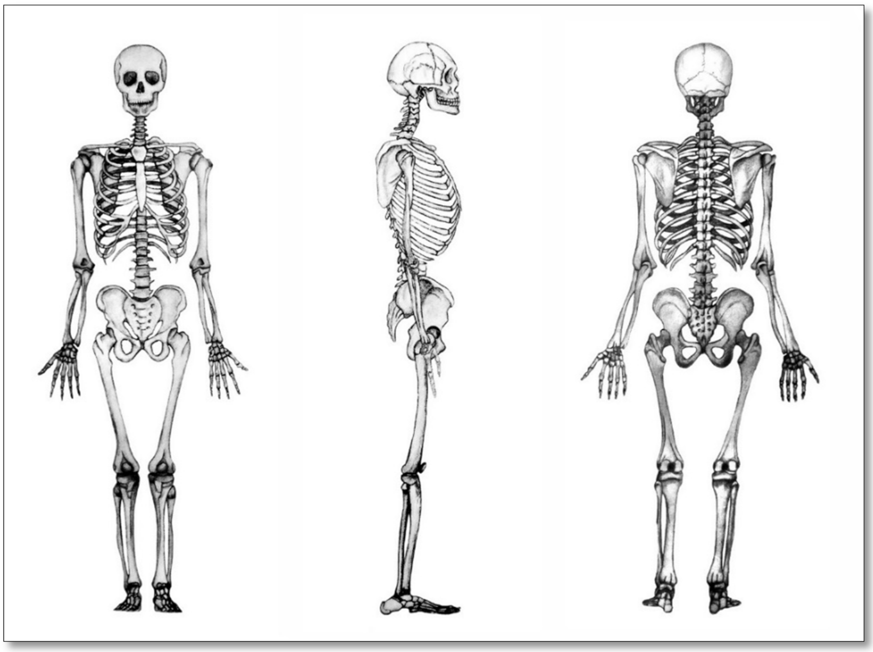
Pregunta 2

Dicen que una oreja bonita es aquella que más se aproxima en su morfología a la espiral de Fibonacci. Dibujar a escala dicha espiral y comprobar de qué manera encaja con la morfología de la oreja que se le muestra a continuación.



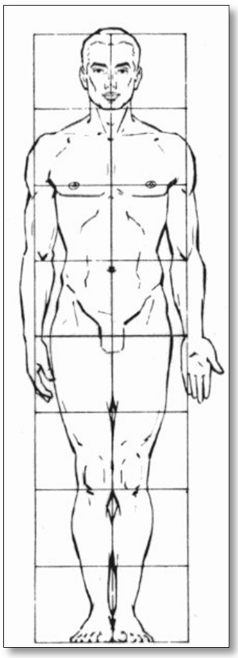
Pregunta 3

Muchos científicos también aseguran que el esqueleto humano es un conjunto en sí mismo de una gran belleza puesto que la mayoría de sus partes cumplen con la proporción áurea. Comprobar gráficamente si esta afirmación es cierta.



Pregunta 4

Los antropólogos afirman que el canon para un hombre adulto de unos 25 años de 1,85 cm de altura es de 8 cabezas de altura. Demostrar gráficamente si este canon tiene además proporciones áureas entre las diferentes regiones del cuerpo más significativas, sabiendo que la altura total de la figura es de 1,85 cm.



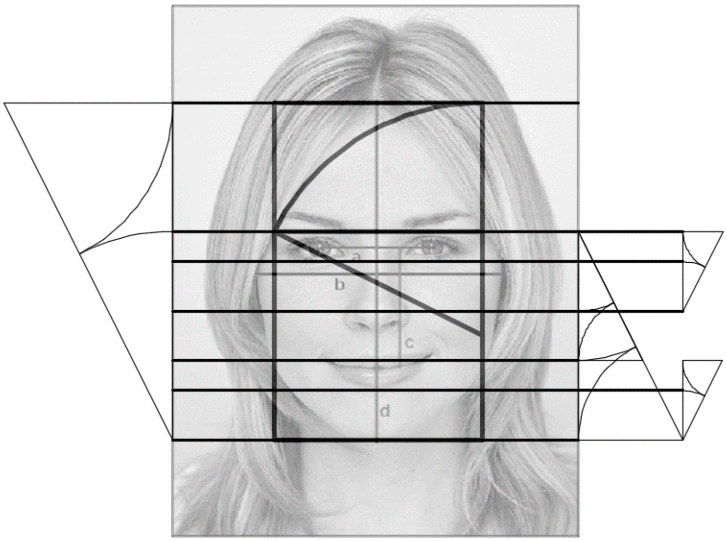
RESPUESTAS Y CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Pregunta 1

Identificar qué proporciones áureas tiene el rostro mostrado a continuación y justificar gráficamente las respuestas. Averiguar más de una relación como por ejemplo: la altura de la cara y la distancia de la barbilla a los ojos o la distancia de la barbilla a la nariz y la altura a la que está la unión de los dos labios. Justificar las respuestas.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Máxima puntuación:



Puntuación parcial: Dibuja correctamente 2 o más relaciones.

Sin puntuación: En blanco o cualquier otra respuesta.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA

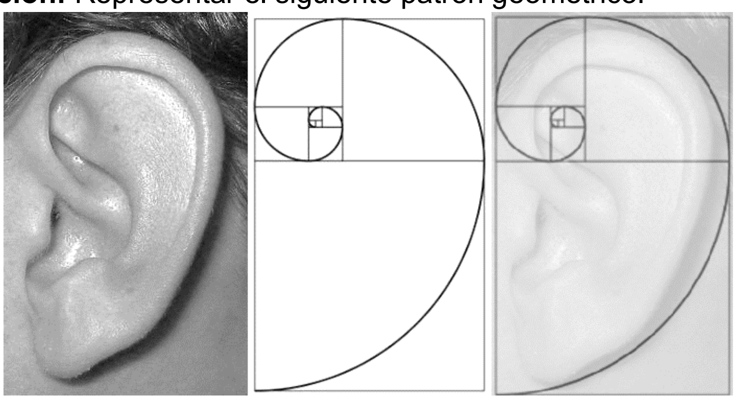
Competencia matemática: Dominar los conceptos y técnicas geométricas referentes a la proporción áurea de la realidad que le rodea.

Pregunta 2

Dicen que una oreja bonita es aquella que más se aproxima en su morfología a la espiral de Fibonacci. Dibujar a escala dicha espiral y comprobar de qué manera encaja con la morfología de la oreja que se le muestra a continuación.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

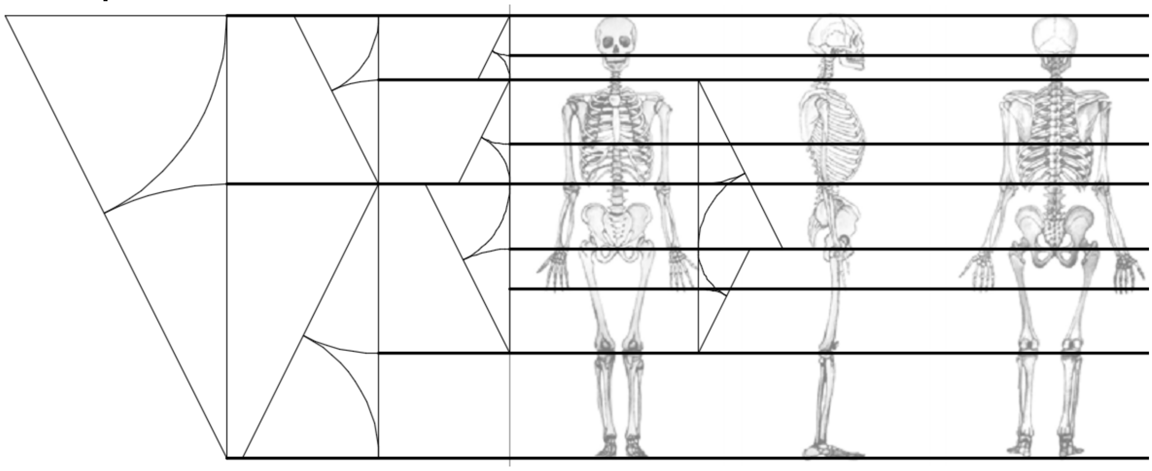
Máxima puntuación: Representar el siguiente patrón geométrico:



Puntuación parcial: Dibuja correctamente la espiral pero no lo ajusta al tamaño de la oreja.
Sin puntuación: En blanco o cualquier otra respuesta.
CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Dominar los conceptos y técnicas geométricas referentes a la proporción áurea de la realidad que le rodea.

Pregunta 3
Muchos científicos también aseguran que el esqueleto humano es un conjunto en sí mismo de una gran belleza puesto que la mayoría de sus partes cumplen con la proporción áurea. Comprobar gráficamente si esta afirmación es cierta.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:

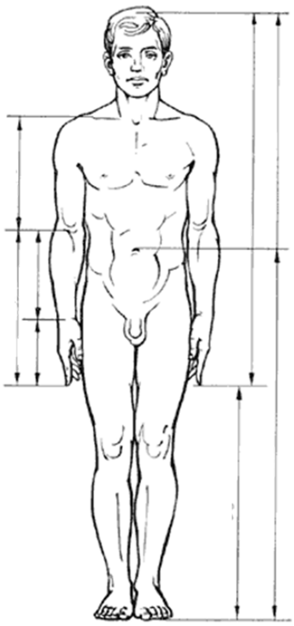


Puntuación parcial: Dibuja correctamente 2 o más relaciones.
Sin puntuación: En blanco o cualquier otra respuesta.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Dominar los conceptos y técnicas geométricas referentes a la proporción áurea de la realidad que le rodea.

Pregunta 4
Los antropólogos afirman que el canon para un hombre adulto de unos 25 años de 1,85 cm de altura es de 8 cabezas de altura. Demostrar gráficamente si este canon tiene además proporciones áureas entre las diferentes regiones del cuerpo más significativas, sabiendo que la altura total de la figura es de 1,85 cm.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:
Se pueden identificar a grandes rasgos las siguientes medidas antropológicas que se encuentran en razón áurea:



Puntuación parcial: Dibuja y relaciona correctamente 2 o más medidas.
Sin puntuación: En blanco o cualquier otra respuesta.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Dominar los conceptos y técnicas geométricas referentes a la proporción áurea de la realidad que le rodea.

PRUEBA DE EVALUACIÓN 8
LA PROPORCIÓN ÁUREA EN EL ARTE

GUÍA TURÍSTICA

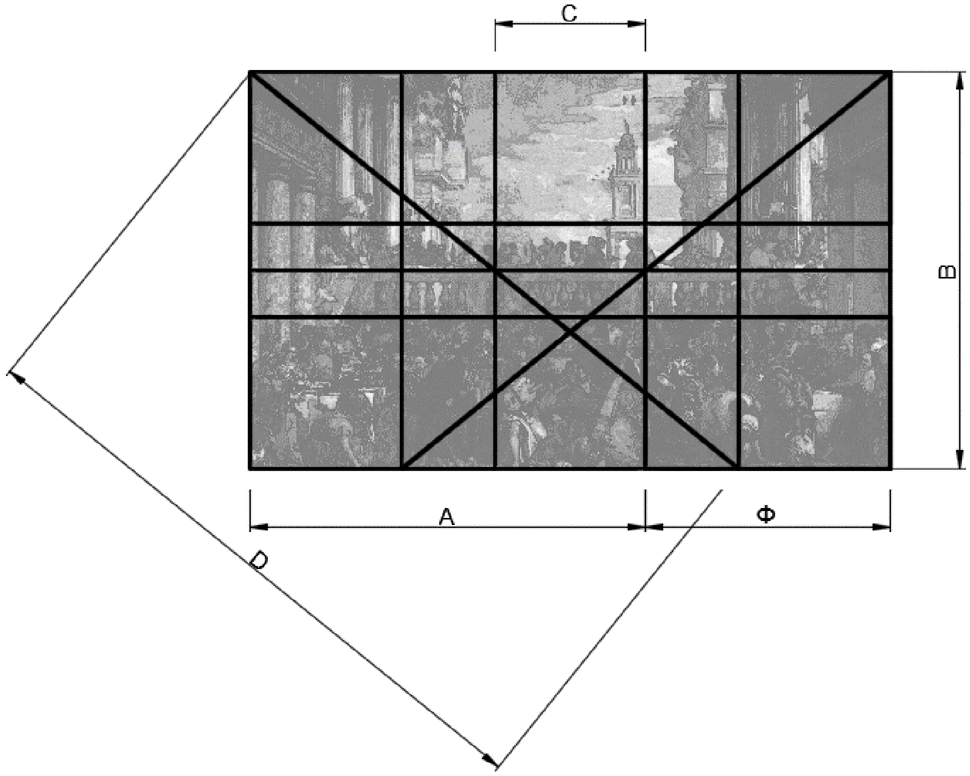
Una editorial de guías turísticas quiere incluir un fascículo que hable sobre la proporción áurea en la obra del pintor manierista italiano Paolo Veronés (1528-1588). Para ello te encarga que analices una de sus obras más importantes: "Las Bodas de Caná", en la que Veronés parece haber empleado el número áureo en su trazado más sencillo.

Pregunta 1

Fíjate en el esquema. ¿Cuántos rectángulos de proporciones áureas se pueden identificar en el cuadro? Justificar la respuesta gráficamente.

Pregunta 2

Calcular las dimensiones A, B, C y D en función de Φ.



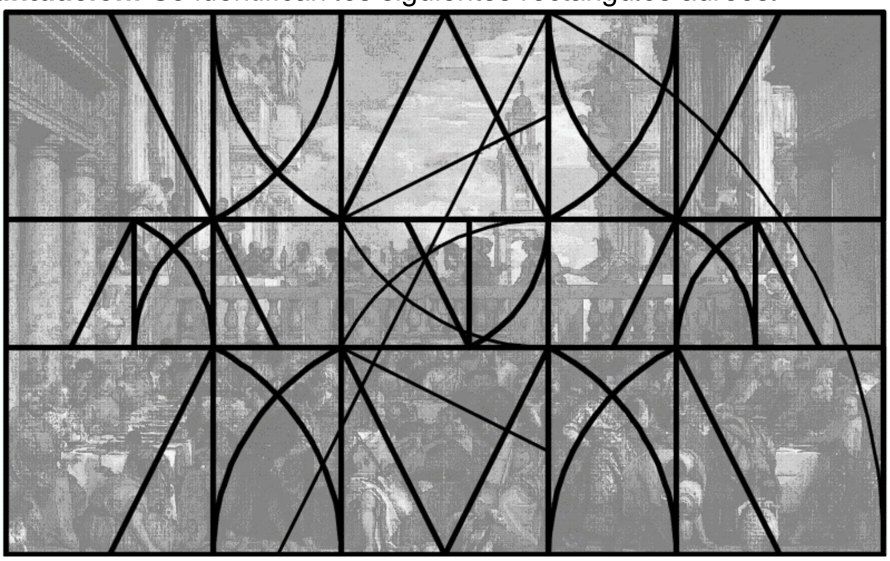
RESPUESTAS Y CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Pregunta 1

Fíjate en el esquema. ¿Cuántos rectángulos de proporciones áureas se pueden identificar en el cuadro? Justificar la respuesta gráficamente.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Máxima puntuación: Se identifican los siguientes rectángulos áureos.



Puntuación parcial: Dibuja dos o más relaciones áureas.
Sin puntuación: En blanco u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Interpretar geométricamente las relaciones de proporcionalidad áurea.

Pregunta 2
Calcular las dimensiones A, B, C y D en función de Φ.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:

$$A = B = \Phi + 1$$
$$C = 1$$
$$D = \sqrt{(\Phi + 1)^2 + 4\Phi^2} = \sqrt{5\Phi^2 + 2\Phi + 1}$$

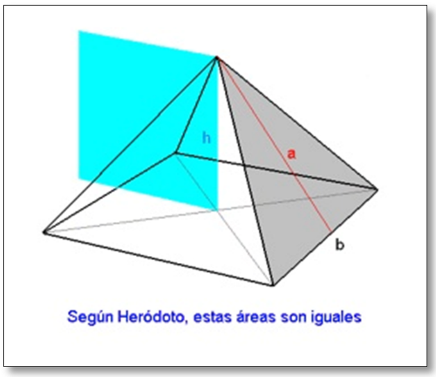
Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación algebraica sencilla pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Plantear problemas geométricos utilizando las nociones sobre la proporcionalidad áurea.

PRUEBA DE EVALUACIÓN 9
LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARQUITECTURA

LA GRAN PIRÁMIDE

"Herodoto (484 – 425 a.C.) relata que los sacerdotes egipcios le habían enseñado que las proporciones establecidas para la Gran Pirámide de Keops entre el lado de la base y la altura eran tales, que el cuadrado construido sobre la altura vertical era exactamente igual al área de cada una de las caras triangulares".



Pregunta 1

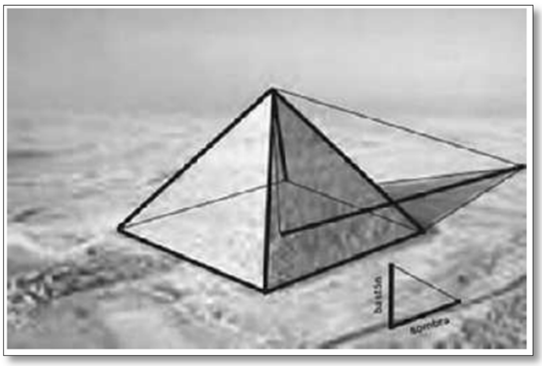
Traducir esta frase a términos algebraicos y demostrar la relación de dicha pirámide con el número áureo.

Pregunta 2

Calcular la altura de la pirámide de Keops sabiendo que tiene una base cuadrada de 230 metros de lado usando como valor de Φ=1,618.

Pregunta 3

Dice la leyenda que Tales midió su altura observando que la sombra proyectada por la pirámide era de 85 metros desde la base y colocando su bastón de 1,46 metros en el punto donde acababa la sombra, midió la que proyectaba el bastón, que era de 2 metros. Volver a calcular su altura sin utilizar el número áureo.



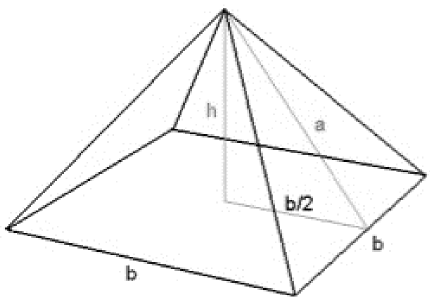
RESPUESTAS Y CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Pregunta 1

Traducir esta frase a términos algebraicos y demuestra la relación de dicha pirámide con el número áureo.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Máxima puntuación:



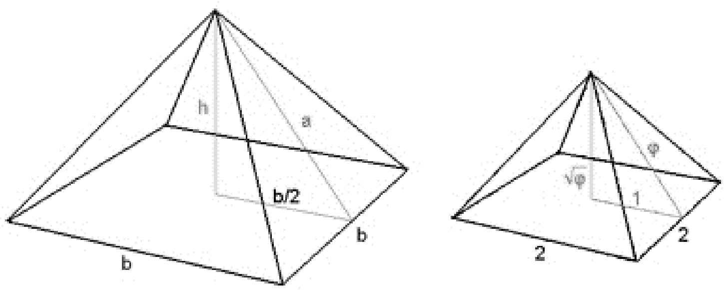
Área de la cara lateral: $\frac{b \cdot a}{2} = h^2$

Por el teorema de Pitágoras: $a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ $\quad a^2 = \frac{b \cdot a}{2} + \frac{b^2}{4} \Rightarrow 4a^2 - 2ba - b^2 = 0$

$$4\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\frac{a}{b} - 1 = 0\,; \quad \frac{a}{b} = x\,; \quad 4x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398874989484820 45\ldots$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{\varphi}{2}\,; \quad \frac{b \cdot a}{2} = h^2 \Rightarrow \frac{b^2 \cdot \varphi}{4} = h^2 \Rightarrow \frac{b^2}{h^2} = \frac{4}{\varphi} \Rightarrow \frac{b}{h} = \frac{2}{\sqrt{\varphi}}$$



Para que se cumpla la condición de Heródoto, la gran pirámide ha de ser semejante a una pirámide en la que la altura de la cara lateral sea igual a fi, el número áureo, y la altura de la pirámide valga la raíz de fi.

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación algebraica sencilla pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.

Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Plantear problemas geométricos utilizando las nociones sobre la proporcionalidad áurea.

Pregunta 2
Calcular la altura de la pirámide de Keops sabiendo que tiene una base cuadrada de 230 metros de lado usando como valor de Φ=1,618.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:

$$\frac{230}{2} = \frac{x}{\sqrt{\Phi}} \Rightarrow x = 146{,}28\ m$$

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación aritmética sencilla pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Plantear problemas geométricos utilizando las nociones sobre la proporcionalidad áurea.

Pregunta 3
Dice la leyenda que Tales midió su altura observando que la sombra proyectada por la pirámide era de 85 metros desde la base y colocando su bastón de 1,46 metros en el punto donde acababa la sombra, midió la que proyectaba el bastón, que era de 2 metros. Volver a calcular su altura sin utilizar el número áureo.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Máxima puntuación:

$$\frac{85 + \frac{230}{2}}{2} = \frac{x}{1{,}46} \Rightarrow x = 146\ m$$

Puntuación parcial: Se equivoca en alguna operación aritmética sencilla pero analiza la coherencia o incoherencia de los resultados obtenidos.
Sin puntuación: Sin respuesta u otras respuestas.

CARACTERÍSTICAS DE LA PREGUNTA
Competencia matemática: Plantear problemas geométricos utilizando las nociones sobre la proporcionalidad áurea.

7.6. ANEXO VI: PRUEBA DE EVALUACIÓN CDI (ABRIL 2015)

A continuación se adjuntan en las páginas siguientes el modelo de Prueba CDI de Abril de 2015 donde se pueden observar los ejercicios y problemas cuya competencia matemática está en relación con el conocimiento y aplicación de la proporcionalidad. En concreto los ejercicios 3, 4, 5 y 7 así como los problemas 1 y 2.